Ueber die Anwendung der darstellenden Geometrie bei Figuren der astronomischen Geographie.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

an der hohen philosophischen Fakultät zu Basel

vorgelegt von

ERNST DIETZ aus ROTHAU i. Elsaß.

ACAD. LUDOVICAT. BIBL.

DAVOS
Buchdruckerei Davos A.-G.
1907.

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professor Dr. A. Riggenbach und Professor Dr. H. Kinkelin.

Basel, den 2. Juli 1906.

Professor Dr. K. Von der Mühll,
Dekan.

Bei der Durchsicht der Lehrbücher über mathematische Geographie und Astronomie fällt uns bei vielen der Unterschied zwischen dem Text und der Ausführung der Figuren auf. So klar und sorgfältig durchdacht der erstere ist, so sehr stechen gegen ihn die Figuren in nachteiliger Weise ab. Ohne selbst Zeichner zu sein, kann man doch leicht beurteilen, ob eine Zeichnung richtig ausgeführt ist, und ob eine Abbildung einen ähnlichen Eindruck hervorbringt, wie der Gegenstand, den sie darstellen soll. Tatsächlich findet man zahlreiche Figuren, die sich beim ersten Blick als fehlerhaft herausstellen. Die Figuren 1, 2, 3, die bekannten und sehr geschätzten Lehrbüchern entnommen wurden, sind Belege hierfür. Fig. 1, 2, 3.

Fragen wir nach dem Grunde, weshalb die Ausführung der Figuren vielfach zu wünschen übrig läßt! Wir glauben ihm vorzugsweise in der Unkenntnis der Regeln und Gesetze zu finden, nach denen eine Zeichnung ausgeführt werden muß. Der Zweig der Wissenschaften nämlich, der das richtige Entwerfen solcher Zeichnungen lehrt, die darstellende Geometrie, wird bis jetzt meistens nur auf technischen Hochschulen gelehrt und gepflegt, wo sie für die richtige Ausführung der technischen Zeichnungen ganz und gar unentbehrlich ist. Auf der Uni-

versität tritt sie gegenüber den andern Zweigen der Mathematik mehr in den Hintergrund. Daher haben Mathematiker und Astronomen weniger Gelegenheit, sich mit darstellender Geometrie zu befassen. Es erschien uns deswegen nicht unnütz, die Projektionsarten der darstellenden Geometrie, soweit sie bei Figuren der mathematischen Geographie und Astronomie in Betracht kommen, in Kürze zu behandeln. Auch vom pädagogischen Standpunkte aus dürfte sich dieses Vorhaben rechtfertigen, denn die Lehrer kommen öfter in die Lage, derartige Zeichnungen ausführen zu müssen. An Lehrbüchern über darstellende Geometrie hat es ja keinen Mangel; jedoch ist es meistens zu zeitraubend, gerade nur dasjenige aus ihnen herauszusuchen, was zur Herstellung derartiger Figuren notwendig ist. Im Folgenden behandeln wir in Kürze die Projektionsarten der darstellenden Geometrie in Hinsicht auf die Konstruktion einiger häufig vorkommender Figuren.

Wir beschränken uns dabei auf die Parallelprojektion und lassen die Zentralprojektion oder Perspektive im engeren Sinne bei Seite, da sie außer dem Bereich des vorliegenden Zweckes liegt.

Die schiefe Projektion.

Wir beginnen mit der Behandlung der schiefen Projektion, welche die weitaus üblichere Projektionsart und gerade bei den im astronomischen und mathematischen Unterricht gebräuchlichsten Figuren am zweckmäßigsten ist. Bei dieser Projektionsart fällt der Sehstrahl geneigt auf die Bildebene. Diese wird

parallel zu einer der Coordinatenebenen, etwa zu der x y Ebene angenommen. Jede mit dieser Ebene parallele Figur erhält dann eine mit ihr congruente und parallele Abbildung.

Allen Figuren, die Gebilde aus der mathematischen Geographie und Astronomie darstellen, liegt die Aufgabe zu Grunde, einen Kreis in allgemeiner beliebiger Lage zu zeichnen. Wir werden deshalb an Hand dieser Aufgabe zuerst in analytischer Weise die Darstellung der Kreisbilder in schiefer Projektion geben.

Ehe wir die analytische Berechnung beginnen, stellen wir einige im Folgenden öfter vorkommende Formeln zusammen, um uns später hierauf zu beziehen.

I. Gehen zwei Richtungen $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ und $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$ durch denselben Punkt $(x_1\ y_1\ z_1)$, so ist die Gleichung der Ebene, welche durch diese Richtungen und den Punkt bestimmt ist:

$$\begin{aligned}&(x-x_1)\ (\cos\beta\ \cos\gamma_1 - \cos\beta_1\ \cos\gamma)\\ &+ (y-y_1)\ (\cos\gamma\ \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\ \cos\alpha)\\ &+ (z-z_1)\ (\cos\alpha\ \cos\beta_1 - \cos\alpha_1\ \cos\beta) = 0\end{aligned} \qquad \text{Ia).}$$

Fällt der Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammen, so wird die Gleichung:

$$\begin{aligned}&x\ (\cos\beta\ \cos\gamma_1 - \cos\beta_1\ \cos\gamma)\\ &+ y\ (\cos\gamma\ \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\ \cos\alpha)\\ &+ z\ (\cos\alpha\ \cos\beta_1 - \cos\alpha_1\ \cos\beta) = 0\end{aligned} \qquad \text{Ib).}$$

II. Die Gleichungen der Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0 \text{ und}$$
$$x \cos \xi + y \cos \eta + z \cos \zeta = 0$$

lauten:

II[a]. $$\frac{x}{\cos \beta \cos \zeta - \cos \eta \cos \gamma} = \frac{y}{\cos \gamma \cos \xi - \cos \alpha \cos \zeta} = \frac{z}{\cos \alpha \cos \eta - \cos \beta \cos \xi}.$$

III. Sind die Richtungswinkel zweier Geraden $\alpha\ \beta\ \gamma$ und $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, so schneiden sich die auf diesen Geraden senkrechten Ebenen in einer neuen Geraden, deren Richtungswinkel $\xi\ \eta\ \zeta$ durch die Gleichungen bestimmt sind:

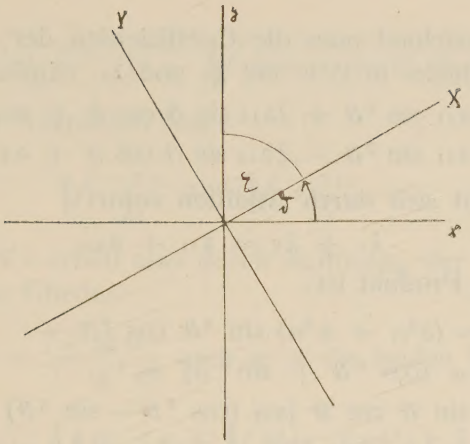
III[a]. $$\begin{cases} \cos \xi = \dfrac{\cos \beta_1 \cos \gamma - \cos \gamma_1 \cos \beta}{\sin \varphi}; \\ \cos \eta = \dfrac{\cos \gamma_1 \cos \alpha - \cos \alpha_1 \cos \gamma}{\sin \varphi}; \\ \cos \zeta = \dfrac{\cos \alpha_1 \cos \beta - \cos \beta_1 \cos \alpha}{\sin \varphi}; \end{cases}$$

wo φ der von den beiden ursprünglichen Geraden eingeschlossene Winkel ist:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1.$$

IV. Die Gleichung eines Kegelschnitts, bezogen auf ein durch seinen Mittelpunkt als Coordinatenanfang gelegtes rechtwinkliges Axensystem lautet:

IV[a]. $$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{33} = 0.$$



Mittelst der Gleichungen:

$$x = X \cos \vartheta - Y \sin \vartheta;$$
$$y = X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta;$$

transformieren wir dasselbe auf ein neues rechtwinkliges Axensystem X Y, welches aus dem früheren durch Drehung um den Winkel ϑ im positiven Drehungssinne hervorgeht; dadurch geht die Gleichung des Kegelschnitts über in: IV b.)

$$X^2 (a_{11} \cos^2 \vartheta + 2 a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta) +$$
$$+ Y^2 (a_{11} \sin^2 \vartheta - 2 a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{22} \cos^2 \vartheta) +$$
$$+ 2 XY \left(\sin \vartheta \cos \vartheta (a_{22} - a_{11}) + a_{12} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)\right) +$$
$$+ a_{33} = 0.$$

Sollen die neuen Coordinatenaxen auf die Hauptaxen des Kegelschnitts fallen, so ist ϑ so zu bestimmen, daß der Coëfficient des Gliedes mit xy verschwindet; d. h. daß

$$(a_{22} - a_{11}) \sin 2\vartheta + 2 a_{12} \cos 2\vartheta = 0;$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \qquad \text{IV c).}$$

Bezeichnet man die Coëfficienten der quadratischen Glieder in IV b) mit λ_1 und λ_2, nämlich:

$$\lambda_1 = a_{11} \cos^2\vartheta + 2a_{12} \sin\vartheta \cos\vartheta + a_{22} \sin^2\vartheta;$$
$$\lambda_2 = a_{11} \sin^2\vartheta - 2a_{12} \sin\vartheta \cos\vartheta + a_{22} \cos^2\vartheta;$$

so ergibt sich durch Addition sofort:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Ihr Produkt ist:

$$\lambda_1 . \lambda_2 = (a^2_{11} + a^2_{22}) \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta +$$
$$+ a_{11} a_{22} (\cos^4\vartheta + \sin^4\vartheta) +$$
$$+ 2a_{12} \sin\vartheta \cos\vartheta [a_{22} (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) -$$
$$- a_{11} (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)] - 4a^2_{11} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta = 0.$$

Fügt man

$$-2a_{11} a_{22} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta + 2a_{11} a_{22} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta$$

hinzu und führt den Winkel 2ϑ ein, so wird:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \tfrac{1}{4} (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 2\vartheta + a_{11} a_{22} +$$
$$+ (a_{22} - a_{11}) a_{12} \sin 2\vartheta \cos 2\vartheta - a^2_{12} \sin^2 2\vartheta.$$

Setzt man nach IV c:

$$(a_{11} - a_{22}) \sin 2\vartheta = 2a_{12} \cos 2\vartheta,$$

so kommt:

$$\lambda_1 . \lambda_2 = a_{11} a_{22} + a^2_{12} \cos^2 2\vartheta - 2a^2_{12} \cos^2 2\vartheta -$$
$$- a^2_{12} \sin^2 2\vartheta$$
$$\text{oder } \lambda_1 . \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a^2_{12}.$$

Die Gleichung des Kegelschnitts bezogen auf die Hauptaxe als Coordinatenaxen lautet demnach:

IV d). $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a_{33} = 0,$

worin λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + a_{11} a_{22} - a^2_{12} = 0;$$

nämlich:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a^2_{12}}. \qquad \text{IV e).}$$

die beiden Hauptaxen sind:

$$\sqrt{\frac{-a_{33}}{\lambda_1}} \text{ und } \sqrt{\frac{-a_{33}}{\lambda_2}}. \qquad \text{IV f).}$$

Aus IV c erhält man durch Auflösung der goniometrischen Glieder:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 \operatorname{tg} \vartheta}{1 - \operatorname{tg}^2 \vartheta} \text{ nach } \operatorname{tg} \vartheta \text{ die beiden Werte} \qquad \text{IV g).}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2 a_{12}} \left(a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a^2_{12}} \right)$$

deren Produkt $= -1$ ist; die beiden Richtungen stehen also zu einander senkrecht.

1. Bestimmung der Gleichung der Projektion eines beliebigen Kreises.

Wir betrachten einen beliebigen größten Kreis der Kugel vom Radius r. Der Einfachheit halber legen wir den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel. Das ist keine Einschränkung, da wir das Coordinatensystem zu jeder Zeit verschieben können. Dieser Kreis ist bestimmt durch den Schnitt der Kugel: r

$$1). \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad 1).$$

mit der Ebene, in welcher der Kreis liegt. Wenn $\xi\ \eta\ \zeta$ die Winkel der Normalen zu dieser Ebene mit der X- bezw. Y- und Z Axe sind, so lautet die Gleichung der Ebene: $\xi\ \eta\ \zeta$

$$2). \quad x \cos \xi + y \cos \eta + z \cos \zeta = 0. \qquad 2).$$

$\alpha\ \beta\ \gamma$ Der Sehstrahl habe die Richtungscosinusse $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, während die Bild- oder Zeichenebene, wie schon erwähnt, mit der X Y Ebene parallel ist. Die Sehstrahlen, die den oben definierten Kreis treffen, bilden eine Cylinderfläche, deren Leitlinie die $x_1\ y_1\ z_1$ Richtungswinkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ besitzt. Wenn $x_1\ y_1\ z_1$ die Coordinaten eines Punktes sind, in dem eine Erzeugende des Cylinders die Leitkurve schneidet, während $x\ y\ z$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben Erzeugenden sind, so gelten die Relationen:

3). $$3).\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma};\ \text{oder}$$

4). $$4).\quad x_1 = x-\Theta\cos\alpha;\ y_1 = y-\Theta\cos\beta;\ z_1 = z-\Theta\cos\gamma;$$

Θ wenn Θ den gemeinsamen Wert obiger Quotienten bedeutet.

Diese Werte für $x_1\ y_1\ z_1$ müssen, da sie sowohl der Cylinderfläche als dem Kreise angehören, die Gleichungen 1) und 2) ebenfalls befriedigen, also erhalten wir:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2 \text{ und}$$
$$x_1\cos\xi + y_1\cos\eta + z_1\cos\zeta = 0;$$

oder:

5). $$5).\quad (x-\Theta\cos\alpha)^2 + (y-\Theta\cos\beta)^2 + (z-\Theta\cos\gamma)^2 = r^2$$
$$\text{und}$$
$$\cos\xi\,(x-\Theta\cos\alpha) + \cos\eta\,(y-\Theta\cos\beta) + \cos\zeta\,(z-\Theta\cos\gamma) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich Θ eliminieren. Aus der zweiten folgt:

6). $$6).\quad \Theta = \frac{x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta}{\cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta};$$

Der Nenner ist nichts anderes als der Cosinus des Winkels, den die beiden Richtungen $\alpha\ \beta\ \gamma$ und $\xi\ \eta\ \zeta$ oder die Richtungen des Sehstrahls und der Normalen der gegebenen Kreisebene mit einander bilden. Dieser Winkel sei φ, sodann wird: φ

$$7).\ \Theta = \frac{x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta}{\cos\varphi} \qquad 7).$$

Wir setzen diesen Wert von Θ in die Gleichung 5) ein und bekommen:

$$8).\ \left(x - \cos\alpha\ \frac{x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta}{\cos\varphi}\right)^2 \qquad 8).$$

$$+\left(y - \cos\beta\ \frac{x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta}{\cos\varphi}\right)^2$$

$$+\left(z - \cos\gamma\ \frac{x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta}{\cos\varphi}\right)^2 = r^2;$$

als Gleichung der Cylinderfläche, die wir um den Kreis von der Richtung $\xi\ \eta\ \zeta$ der Normalen mit den Sehstrahlen von der Richtung $\alpha\ \beta\ \gamma$ als Erzeugenden beschreiben.

Wir suchen jetzt die Schnittlinie dieses Cylinders mit der Bildebene, die wir parallel der X Y-Ebene annehmen. Da alsdann das Bild des Kreises in schiefer Projektion der Schnittkurve mit der X Y-Ebene kongruent ist, so ist die Gleichung der letzteren selbst zugleich die des Kreisbildes in der Zeichenebene.

Um die Schnittkurve der Cylinderfläche mit der X Y Ebene zu erhalten, brauchen wir nur in der Gleichung 8), die den Cylinder darstellt, $z = 0$ zu setzen.

Es wird dann:

$$\left(x - \cos\alpha \frac{x\cos\xi + y\cos\eta}{\cos\varphi}\right)^2 + \left(y - \cos\beta \frac{x\cos\xi + y\cos\eta}{\cos\varphi}\right)^2 + \left(\cos\gamma \frac{x\cos\xi + y\cos\eta}{\cos\varphi}\right)^2 \quad r^2;$$

oder nach Entwicklung der Quadrate:

9). $$9).\ x^2(\cos^2\varphi - 2\cos\alpha\cos\xi\cos\varphi + \cos^2\xi) + y^2(\cos^2\varphi - 2\cos\beta\cos\eta\cos\varphi + \cos^2\eta) - 2xy(\cos\alpha\cos\eta\cos\varphi + \cos\beta\cos\xi\cos\varphi - \cos\xi\cos\eta) - r^2\cos^2\varphi \quad 0;$$

als Gleichung der Schnittkurve des Cylinders mit der X Y Ebene oder der schiefen Projektion eines Kreises. Diese Gleichung stellt eine Ellipse dar.

Man kann der Gleichung 9) eine übersichtlichere Form geben. Das nämliche Bild liefert noch ein anderer Kreis in derselben Projektionsrichtung. Denn wie ein Cylinder zwei kongruente Schnitte zeigt, die in Bezug auf die Cylinderachse symmetrisch liegen, so erscheinen auch diese beiden Kreise in der Sehstrahlrichtung als ebene Schnitte der sie umhüllenden Cylinderfläche. Der Umstand, daß beide Kreise in Bezug auf die Cylinderachse oder Schstrahlrichtung symmetrisch sind, bedingt, daß ihre Normalen mit der Cylinderaxe in einer Ebene liegen und daß diese Axe den Winkel zwischen beiden Normalen halbiert. Nennt man die Richtung der Normale auf den zweiten Kreis $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ (Fig. 4), so bringt die letztere Bedingung die Gleichung:

$\xi'\ \eta'\ \zeta'$
Fig. 4

10). $\cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta =$ 10).
$= \cos\alpha\cos\xi' + \cos\beta\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta' = \cos\varphi.$

Um die erstere Eigenschaft in einer Gleichung auszudrücken, benennen wir die Richtungswinkel der Normale auf die Ebene, die man durch die drei vorhin erwähnten Geraden legen kann, mit a b c, dann haben wir die Gleichungen: a b c

11). $\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma = 0;$ 11).
$\cos a\cos\xi + \cos b\cos\eta + \cos c\cos\zeta = 0;$
$\cos a\cos\xi' + \cos b\cos\eta' + \cos c\cos\zeta' = 0$

und

12). $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$ 12).

Aus den Gleichungen 11) erhält man durch Elimination von cos c

$$\frac{\cos a}{\cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta} = \frac{\cos b}{\cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta}$$

oder mit ϑ als noch unbestimmter Größe: ϑ

$$\vartheta\cos a = \cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta;$$
$$\vartheta\cos b = \cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta;$$

und endlich:

$$\vartheta\cos c = \cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi.$$

In gleicher Weise findet man aus der ersten und dritten Gleichung von 11):

$$\vartheta'\cos a = \cos\beta\cos\zeta' - \cos\gamma\cos\eta';$$
$$\vartheta'\cos b = \cos\gamma\cos\xi' - \cos\alpha\cos\zeta';$$
$$\vartheta'\cos c = \cos\alpha\cos\eta' - \cos\beta\cos\xi';$$

Die Substitution dieser Werte in die Gleichung 12) gibt:

13). $\vartheta^2 \quad \vartheta'^2 = \sin^2 \varphi$, woraus

$$\vartheta = \pm \vartheta'.$$

Die Annahme $\vartheta = \vartheta'$ ergäbe aber die Gleichheit von $\xi\ \eta\ \zeta$ und $\xi'\ \eta'\ \zeta'$ und ist somit unzulässig. Daher ist $\vartheta' = -\vartheta$ und die letzten Gleichungen lauten:

$$\vartheta \cos a = \cos \gamma \cos \eta' - \cos \beta \cos \zeta';$$
$$\vartheta \cos b = \cos \alpha \cos \zeta' - \cos \gamma \cos \xi';$$
$$\vartheta \cos c = \cos \beta \cos \xi' - \cos \alpha \cos \eta'.$$

Die Subtraktion dieser Werte von den oben gefundenen ergibt:

$$\cos \beta (\cos \zeta' + \cos \zeta) = \cos \gamma (\cos \eta' + \cos \eta);$$
$$\cos \gamma (\cos \xi' + \cos \xi) = \cos \alpha (\cos \zeta' + \cos \zeta);$$
$$\cos \alpha (\cos \eta' + \cos \eta) = \cos \beta (\cos \xi' + \cos \xi);$$

woraus man in Verbindung mit der aus 10) sich ergebenden Gleichung:

$$\cos \alpha (\cos \xi' + \cos \xi) + \cos \beta (\cos \eta' + \cos \eta) + \cos \gamma (\cos \zeta' + \cos \zeta) = 2 \cos \varphi$$ erhält:

14). $\cos \xi' + \cos \xi = 2 \cos \alpha \cos \varphi;$
$\cos \eta' + \cos \eta = 2 \cos \beta \cos \varphi;$
$\cos \zeta' + \cos \zeta = 2 \cos \gamma \cos \varphi.$

Setzt man endlich diese Werte von $2 \cos \alpha \cos \varphi$, $2 \cos \beta \cos \varphi$, $2 \cos \gamma \cos \varphi$ in die Gleichung der Kreisprojektion

9). $x^2 (\cos^2 \varphi - 2 \cos \alpha \cos \xi \cos \varphi + \cos^2 \xi) +$
$+ y^2 (\cos^2 \varphi - 2 \cos \beta \cos \eta \cos \varphi + \cos^2 \eta)$
$- 2 x y (\cos \alpha \cos \eta \cos \varphi + \cos \beta \cos \xi \cos \varphi$
$- \cos \xi \cos \eta) - r^2 \cos^2 \varphi = 0$

ein, so erhält man die angekündigte vereinfachte Gleichung:

15). $x^2(\cos^2\varphi - \cos\xi'\cos\xi) + y^2(\cos^2\varphi - \cos\eta'\cos\xi)$ 15).
$- xy(\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi - r^2\cos^2\varphi = 0.$

2. Bestimmung der Hauptaxen.

Aus Gleichung IV e

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a^2_{12}}$$

berechnen wie λ. Es ist hier (cf. Gleichung 15).

$$a_{11} = \cos^2\varphi - \cos\xi'\cos\xi;$$
$$a_{22} = \cos^2\varphi - \cos\eta'\cos\eta;$$
$$a_{12} = -\frac{\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi}{2}$$
$$a_{33} = -r^2\cos^2\varphi;$$

also

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[2\cos^2\varphi - (\cos\xi'\cos\xi + \cos\eta'\cos\eta') \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(\cos\xi'\cos\xi - \cos\eta'\cos\eta)^2 + (\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi)^2}\right].$$

Nun schließen die beiden Normalen der Kreisebenen $\xi\,\eta\,\zeta$ und $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ den Winkel 2φ ein, woraus folgt:

$$\cos\xi'\cos\xi + \cos\eta'\cos\eta + \cos\zeta'\cos\zeta - \cos 2\varphi =$$
$$= 2\cos^2\varphi - 1;$$

demnach wird:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\zeta'\cos\zeta \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\cos^2\xi'\cos^2\xi + \cos^2\eta'\cos^2\eta + \cos^2\xi'\cos^2\eta + \cos^2\eta'\cos^2\xi}\right],$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\zeta'\cos\zeta \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{(\cos^2\xi' + \cos^2\eta')(\cos^2\xi + \cos^2\eta')}\right]$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[1 + \cos\zeta' \cos\zeta \pm \sin\zeta' \sin\zeta\right].$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left[1 + \cos(\zeta' \mp \zeta)\right].$$

Dies eingesetzt in die Kegelschnittgleichung IV d gibt:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \cos(\zeta' - \zeta)\right) X^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\zeta' + \zeta)\right) Y^2 - r^2 \cos^2\varphi = 0$$

oder:

16.) 16). $$\frac{X^2}{\frac{2 r^2 \cos^2\varphi}{1 + \cos(\zeta' - \zeta)}} + \frac{Y^2}{\frac{2 r^2 \cos^2\varphi}{1 + \cos(\zeta' + \zeta)}} - 1 = 0.$$

Aus IV f ergibt sich die eine Halbaxe:

$$= \sqrt{\frac{2 r^2 \cos^2\varphi}{1 + \cos(\zeta' + \zeta)}} = \frac{r \cos\varphi}{\cos\frac{\zeta' + \zeta}{2}};$$ die andere =

$$= \sqrt{\frac{2 r^2 \cos^2\varphi}{1 + \cos(\zeta' - \zeta)}} = \frac{r \cos\varphi}{\cos\frac{\zeta' - \zeta}{2}}.$$

3. Winkel zwischen Hauptaxen und Coordinatenaxen.

Die Kegelschnittgleichung 15) hat die Form der Gleichung IV a. Es ist hier:

$$a_{11} = \cos^2\varphi - \cos\xi' \cos\xi;$$

$$a_{22} = \cos^2\varphi - \cos\eta \cos\eta;$$

$$a_{12} = -\frac{\cos\xi' \cos\eta + \cos\eta' \cos\xi}{2}.$$

Nennen wir auch hier ϑ den Winkel der neuen X-Axe mit der alten x Axe (siehe Fig. pag. 5), so bekommen wir aus IV c:

$$17).\quad \operatorname{tg} 2\vartheta = -\frac{\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi}{\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi}; \qquad 17).$$

und aus IV g:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi}\left[\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \right.$$

$$\left. \mp \sqrt{(\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi)^2 + (\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi)^2}\right]$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi} \qquad 17a).$$

$$\left[\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \right.$$

$$\left. \mp \sqrt{(\cos^2\xi' + \cos^2\eta')(\cos^2\xi + \cos^2\eta)}\right];$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi}$$

$$\left[\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta\right].$$

Aus $\cos^2\vartheta = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}$ berechnet sich:

$$\cos\vartheta = \frac{\pm\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi}{\sqrt{2\sin\zeta'\sin\zeta\left[\sin\zeta'\sin\zeta \mp (\cos\xi'\cos\xi - \cos\eta'\cos\eta)\right]}}. \qquad 18).$$

Der Winkel der neuen X Axe mit der alten y Axe sei ε (siehe Fig. pag 5) dann ist $\varepsilon = 90^0 - \vartheta$, oder: ε

$$19).\quad \cos\varepsilon = \pm\sqrt{1-\cos^2\vartheta} = \qquad 19).$$

$$= \pm\frac{\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta}{\sqrt{2\sin\zeta'\sin\zeta\left(\sin\zeta'\sin\zeta \mp (\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi)\right)}}.$$

Die Winkel der neuen Y Axe mit der alten seien ϑ_1 und ε_1, so ist $\vartheta_1 = 90^0 + \vartheta$

$$\varepsilon_1 = \vartheta \quad ; \quad \text{daher:}$$

$$\cos \vartheta_1 = -\sin \vartheta = -\operatorname{tg} \vartheta \cos \vartheta$$

18a). $\cos \vartheta_1 =$

$$\mp \frac{\cos \eta' \cos \eta - \cos \xi' \cos \xi \mp \sin \zeta' \sin \zeta}{\sqrt{2 \sin \zeta' \sin \zeta \left(\sin \zeta' \sin \zeta \mp (\cos \eta' \cos \eta - \cos \xi' \cos \xi) \right)}} ;$$

19a). 19a). $\cos \varepsilon_1 =$

$$\pm \frac{\cos \zeta' \cos \eta + \cos \eta' \cos \xi}{\sqrt{2 \sin \zeta' \sin \zeta \left(\sin \zeta' \sin \zeta \mp (\cos \eta \cos \eta - \cos \xi' \cos \xi) \right)}} .$$

4. Bestimmung derjenigen Kreisdurchmesser, die in der Projektion als Hauptaxen erscheinen.

Wir legen durch die Richtungen $\vartheta \varepsilon 90^0$ (Hauptaxen) und $\alpha \beta \gamma$ (Sehstrahl des Mittelpunktes) eine Ebene, welche die Gleichung hat (cf. I [b])

$$x \cos \varepsilon \cos \gamma - y \cos \vartheta \cos \gamma + z (\cos \vartheta \cos \beta - \cos \varepsilon \cos \alpha) = 0.$$

Die Schnittlinie dieser Ebene mit derjenigen des betrachteten Kreises, also mit:

$$x \cos \xi + y \cos \eta + z \cos \zeta = 0.$$

gibt die Lage desjenigen Durchmessers an, der in der Sehstrahlrichtung auf die Bildebene als Hauptaxe projiciert wird. Die Gleichung dieser Schnittlinie lautet (cf. II a):

$$\frac{x}{-\cos \gamma \cos \zeta \cos \vartheta - \cos \eta (\cos \vartheta \cos \beta - \cos \alpha \cos \varepsilon)} =$$

$$= \frac{y}{\cos \xi (\cos \vartheta \cos \beta - \cos \alpha \cos \varepsilon) - \cos \zeta \cos \gamma \cos \varepsilon} =$$

$$= \frac{z}{\cos\varepsilon\cos\gamma\cos\eta + \cos\vartheta\cos\gamma\cos\xi} \text{ oder:}$$

$$\frac{x}{\cos\alpha\cos\eta\cos\varepsilon - \cos\vartheta(\cos\varphi - \cos\alpha\cos\xi)} =$$

$$= \frac{y}{\cos\beta\cos\xi\cos\vartheta - \cos\varepsilon(\cos\varphi - \cos\beta\cos\eta)} =$$

$$= \frac{z}{\cos\gamma\,[\cos\varepsilon\cos\eta + \cos\vartheta\cos\xi]}.$$

Setzen wir die Werte für ϑ und ε (cf 18 u. 19) ein, so erhalten wir:

$$\frac{x}{\cos\alpha\cos\eta(\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta) -} =$$
$$- (\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi)(\cos\varphi - \cos\alpha\cos\xi)$$

$$\frac{y}{\cos\beta\cos\xi(\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi) -}$$
$$- (\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta)(\cos\varphi - \cos\beta\cos\eta)$$

$$= \frac{z}{\cos\gamma\,[\cos\eta(\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta) +}.$$
$$+ \cos\xi(\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi)] \quad \text{oder:}$$

20). $$\frac{x}{\cos\alpha\sin\zeta(\cos\eta'\sin\zeta \mp \cos\eta\sin\zeta') -} =$$ 20).
$$- \cos\varphi(\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi)$$

$$= \frac{y}{\cos\beta\sin\zeta(\cos\eta'\sin\zeta \mp \cos\eta\sin\zeta') -} =$$
$$- \cos\varphi(\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta)$$

$$\frac{z}{\cos\gamma\sin\zeta(\cos\eta'\sin\zeta \mp \cos\eta\sin\zeta')}.$$

Die die andere Hauptaxe ergebende Gerade besitzt die auf analoge Weise zu findende Gleichung:

$$\frac{x}{\cos\alpha\cos\eta\,(\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi) + (\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\sin\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta)(\cos\varphi - \cos\alpha\cos\xi)} = \frac{y}{-\cos\beta\cos\xi\,(\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi + \sin\zeta'\sin\zeta) - (\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi)(\cos\varphi - \cos\beta\cos\eta)} = \frac{z}{\cos\gamma\,[\cos\eta\,(\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi) - \cos\xi\,(\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta)]};$$

oder

20 a).
$$\frac{x}{\cos\alpha\sin\zeta\,(\cos\xi'\sin\zeta \pm \cos\xi\sin\zeta') + \cos\varphi\,(\cos\eta'\cos\eta - \cos\xi'\cos\xi \mp \sin\zeta'\sin\zeta)} = \frac{y}{\cos\beta\sin\zeta\,(\cos\xi'\sin\zeta \pm \cos\xi\sin\zeta') - \cos\varphi\,(\cos\xi'\cos\eta + \cos\eta'\cos\xi)} = \frac{z}{\cos\gamma\sin\zeta\,(\cos\xi'\sin\zeta \pm \cos\xi\sin\zeta')}.$$

Durch eine längere Ausrechnung läßt sich zeigen, daß die beiden Geraden aufeinander senkrecht stehen, wie es die projektive Geometrie lehrt.

5. Kugelumriß in schiefer Projektion.

Wir können diese Aufgabe als speziellen Fall der vorigen (pag. 8) auffassen, nämlich wenn der

abzubildende Kreis auf der Sehstrahlrichtung, also auf der Erzeugenden des Umhüllungszylinders senkrecht steht. Es fällt dann die Normale auf die Kreisebene mit der Sehstrahlrichtung zusammen, d. h. es ist (pag. 8). $\xi = \alpha$; $\eta = \beta$; $\zeta = \gamma$, woraus folgt $\varphi = 0$. Die Gleichung 9), welche die Abbildung des Kreises darstellt, wird dann:

21). $x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta - 2xy \cos \alpha \cos \beta - r^2 = 0.$

Wir transformieren diese Gleichung auf die Hauptaxen mittelst IV d:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}\,a_{22} - a^2_{12} = 0;$$

Hier ist (cf. IV a).

$$a_{11} = \sin^2 \alpha;$$

$$a_{22} = \sin^2 \beta;$$

$$a_{12} = -\cos \alpha \cos \beta; \text{ daher:}$$

$$\lambda^2 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)\,\lambda + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = 0;$$

oder: $\lambda^2 - (1 + \cos^2 \gamma)\,\lambda + \cos^2 \gamma = 0;$

Daraus folgt:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos^2 \gamma \pm (1 - \cos^2 \gamma)\right);$$

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = \cos^2 \gamma.$$

Demnach lautet nach IV d die auf die Hauptaxen bezogene Gleichung der Kurve, die den Umriß der Kugel in schiefer Projektion wiedergibt:

$$X^2 + Y^2 \cos^2 \gamma - r^2 = 0 \text{ oder}$$

22). $$\frac{X^2}{r^2} + \frac{Y^2}{\frac{r^2}{\cos^2 \gamma}} - 1 = 0.$$

Die große Halbaxe dieser Ellipse ist $\frac{r}{\cos \gamma}$; die kleine $= r$.

6. Richtungen der Hauptaxen in der Bild- oder XY Ebene.

Es war in IV g für den Winkel ϑ der Axe der X mit der x Axe gefunden worden; (siehe Fig. pag 5):

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{2\,a_{12}}\left[a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a^2_{12}}\right];$$

also hier

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta}\left[\sin^2\beta - \sin^2\alpha \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)^2 + 4\cos^2\alpha\cos^2\beta}\right];$$

$$= -\frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta}\left[\cos^2\alpha - \cos^2\beta \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)^2 + 4\cos^2\alpha\cos^2\beta}\right];$$

$$= -\frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta}\left[\cos^2\alpha - \cos^2\beta + (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)\right];$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha};$$

Daraus findet man ferner:

23). $$\cos\vartheta_1 = \pm\frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}} = \pm\frac{\cos\beta}{\sin\gamma};$$ 23.)

$$\cos\vartheta_2 = \pm\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma};$$

23 a). $\cos \varepsilon_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1} = \pm \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}$; 23 a.)

$$\cos \varepsilon_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_2} = \mp \frac{\cos \beta}{\sin \gamma};$$

wobei bezüglich der Festsetzung des Vorzeichens in Betracht gezogen wurde, daß die beiden Richtungen auf einander senkrecht stehen; demnach $\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 = 0$ sein muß.

7. Bestimmung derjenigen Geraden, die in der Projektion die Hauptaxen ergeben.

Die durch die Richtungen $\vartheta \varepsilon 90^0$ (Hauptaxen) und $\alpha \beta \gamma$ (Sehstrahl des Mittelpunktes) gehende Ebene hat, wie wir auf pag. 16 sahen, die Gleichung:

$$x \cos \varepsilon \cos \gamma - y \cos \vartheta \cos \gamma + z (\cos \vartheta \cos \beta - \cos \varepsilon \cos \alpha) = 0;$$

oder mit Einsetzung der für die eine Hauptaxe gefundenen Werte von $\cos \vartheta$ und $\cos \varepsilon$ (23 und 23 a).

$$- x \cos \alpha \cos \gamma - y \cos \beta \cos \gamma + z (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 0;$$

und für die andere Hauptaxe:

$$x \cos \beta \cos \gamma - y \cos \alpha \cos \gamma + z (\cos \alpha \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta) = 0.$$

oder:

24). $x \cos \alpha \cos \gamma + y \cos \beta \cos \gamma - z \sin^2 \gamma = 0;$ 24).

und:

24 a). $x \cos \beta - y \cos \alpha = 0.$ 24 a.)

Diese Ebenen schneiden diejenige des größten Kreises, der in seiner Projektion den Kugelumriß gibt, also die Ebene:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

in den Geraden (nach II a):

$$\frac{x}{\cos\beta\cos^2\gamma + \cos\beta\sin^2\gamma} \quad \frac{y}{-\sin^2\gamma\cos\alpha - \cos^2\gamma\cos\alpha}$$

$$\frac{z}{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$

und:

25). $$\frac{x}{-\cos\alpha\cos\gamma} \quad \frac{y}{-\cos\beta\cos\gamma} = \frac{z}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta} =$$

oder:

25a). 25). $$\frac{x}{\cos\beta} = -\frac{y}{\cos\alpha}; \quad x\cos\alpha + y\cos\beta = 0;$$

und

25a). $$\frac{x}{\cos\alpha\cos\gamma} = \frac{y}{\cos\beta\cos\gamma} = -\frac{z}{\sin^2\gamma}.$$

Das sind die Gleichungen der Geraden, die in der Projektion als Hauptaxen erscheinen. Die erste Gerade, deren Bild die Richtung der kleinen Axe hat, steht auf der Z Axe senkrecht und ist der X Y-Ebene parallel; es muß demnach, da der rechte Winkel als rechter abgebildet wird, die zweite Gerade in der Bildebene die Richtung der Z Axe haben. Dies geht übrigens auch aus der Gleichung der Ebene durch die große Axe und die Sehstrahlrichtung hervor. Wir sahen, lautete diese Gleichung 24 a) $x\cos\beta - y\cos\alpha = 0$. Ebenso lautet nämlich die durch die Richtungen $90^0\ 90^0\ 0^0$ und $\alpha\beta\gamma$ gelegte Ebene, die die Bildebene, also die Ebene $z = 0$, in der Geraden $x\cos\beta - y\cos\alpha \quad 0$ schneidet. Diese Gerade steht auf der kleinen Axe $x\cos\alpha + y\cos\beta - 0$ senkrecht, stellt also die große Axe dar.

8. Konstruktion des Kugelumrisses in schiefer Projektion.

Der Umstand, daß das Bild der Z Axe dieselbe Richtung hat, wie die Hauptaxe der Ellipse, die den Kugelumriß darstellt, wird zur Konstruktion benützt. Es sei in Fig. 6 M die Abbildung des Kugelmittelpunktes, M C diejenige eines auf der Bildebene senkrechten Halbmessers, M B $\perp$ M C diejenige eines mit der Bildebene parallelen Halbmessers, der also die wahre Größe desselben angibt. Dann ist der Umriß der Abbildung eine Ellipse, welche M zum Mittelpunkte, C zu einem Brennpunkte hat, deren kleine Halbaxe ($\perp$ M C) = M B und deren große Halbaxe M A (auf M C) daher = C B ist. Denn der projizierende Cylinder ist ein der Kugel umschriebener Umdrehungscylinder, und denkt man sich die auf dem Halbmesser M C senkrechte Bildebene durch C gelegt, so berührt sie in C die Kugel; und ihr Schnitt mit dem Cylinder oder der gesuchte Umriß ist dann eine Ellipse, welche, wie wir gleich beweisen werden, C zu einem Brennpunkte, den Schnittpunkt mit der Cylinderaxe, d. i. die Abbildung M des Kugelmittelpunktes zum Mittelpunkte und die kleine Halbaxe gleich dem Kugelhalbmesser hat. Fig. 6

Wir betrachten zum Beweise des letzteren Satzes einen Cylinder (Fig. 7), den eine durch seine Axe senkrecht zur Schnittebene gelegte Ebene in den Erzeugenden E E_1 und D D_1 schneide, die Schnittebene dagegen in den Geraden A A_1. Man lege an diese Gerade innerhalb des Cylinders zwei in F und F_1 berührende Kugeln. Eine durch den beliebigen Punkt P der Schnittkurve gelegte Erzeugende be- Fig. 7

rührt die Kugeln in Q und Q_1; zieht man noch P F und $P F_1$, so ist P F = P Q und $P F_1 = P Q_1$ jedesmal als zwei Tangenten aus P an dieselbe Kugel. Daher ist $P F + P F_1 = P Q + P Q_1 = Q Q_1 = D D_1$ oder da für alle Punkte P der Schnittkurve $Q Q_1$ unveränderlich $= D D_1$ ist, so ist die Kurve eine Ellipse mit F und F_1 als Brennpunkten und $A A_1$ als Hauptaxe, die also in der zur Schnittebene senkrechten Meridianebene liegt. Die kleine Axe liegt senkrecht dazu und ist gleich dem Radius der Kugel.

Fig. 5 stellt drei Kreise, die in den drei Coordinatenebenen liegen, in schiefer Projektion dar.

Die Orthogonal-Projektion.

Die andere Art der Parallelprojektion, bei der die drei Coordinatenaxen auf dieselbe Ebene abgebildet werden, ist die senkrechte oder Orthogonalprojektion. Es fällt hierbei der Sehstrahl senkrecht auf die Bildebene. Bei dieser Projektionsart stellt man die neue Projektionsebene gewöhnlich geneigt gegen alle drei Axen und gegen die Ebene je zweier, damit keine Kante noch Seitenfläche des abzubildenden Körpers nur durch einen Punkt oder eine Gerade dargestellt werde. Das Verfahren, die senkrechte Projektion eines Raumgebildes mittelst der Projektionen der rechtwinkligen Coordinaten seiner Punkte herzustellen, heißt die Axonometrie.

1. Voraussetzungen und Beziehungen.

In unserem Coordinatensystem gehen von dem Anfangspunkte O die drei auf einander senkrechten

Coordinatenaxen OX, OY, OZ aus, die Bildebene gehe durch den Anfangspunkt, und ihre Lage sei bestimmt durch die Stellungswinkel a b c, welche die Normale zur Bildebene, nämlich der Sehstrahl OS mit den drei Coordinatenaxen einschließt. (Fig. 8.) a b c Fig. 8.

Die Projektion der Richtung des Sehstrahls auf die Bildebene nennen wir das Bild des betreffenden Gegenstandes, z. B. ist OG^1 das Bild der durch den Anfangspunkt gehenden Geraden OG_1 und OL, OM ON die Bilder der Coordinatenaxen OX, OY, OZ.

Winkel, welche in der Bildebene liegen, bezeichnen wir im folgenden mit kleinen griechischen Buchstaben, Winkel außerhalb der Bildebene mit kleinen lateinischen; Strecken mit großen lateinischen; Indices verweisen auf Spezialisierungen.

2. Stellungswinkel einer Geraden und ihres Bildes.

Gegeben sind die Winkel r s t einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden OG mit den Axen OX, OY, OZ; gesucht die Winkel $r^1 s^1 t^1$ ihres Bildes mit den nämlichen Axen. r s t $r^1 s^1 t^1$

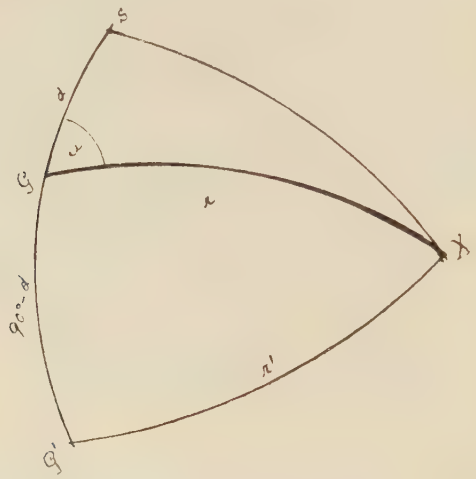
Den Winkel d des Geraden mit dem Sehstrahl erhält man aus: d

26). $\cos d = \cos a \cos r + \cos b \cos s + \cos c \cos t;$ 26.)

der Winkel zwischen der Geraden und ihrem Bild beträgt: $90^\circ - d$.

Legt man eine Kugel um den Anfangspunkt als Centrum, so schneiden auf dieser die drei Ebenen durch Sehstrahl, X Axe und Bild OG^1 ein rechtsei-

tiges sphaerisches Dreieck aus, in dessen rechter Seite die Gerade O G selbst liegt. Bezeichnet man den Winkel S G X mit u, so ist:



$$\cos a = \cos r \cos d + \sin r \sin d \cos u; \text{ und}$$

$$\cos r^1 = \cos r \sin d - \sin r \cos d \cos u.$$

Durch Elimination von cos u folgt:

$\cos r^1 \sin d = \cos r - \cos a \cos d$; woraus die Richtungswinkel des Bildes der Geraden erhalten werden:

27) 27).

$$\begin{cases} \cos r^1 = \dfrac{\cos r}{\sin d} - \cos a \operatorname{ctg} d; \\ \cos s^1 = \dfrac{\cos s}{\sin d} - \cos b \operatorname{ctg} d; \\ \cos t^1 = \dfrac{\cos t}{\sin d} - \cos c \operatorname{ctg} d; \end{cases}$$

3. Stellungswinkel der Axenbilder.

Die Bilder der Coordinatenaxen nennen wir OL, OM, ON, ihre Stellungswinkel $l_x\ l_y\ l_z$, $m_x\ m_y\ m_z$, $n_x\ n_y\ n_z$. Man erhält sie aus den Gleichungen 27). indem man die Gerade OG der Reihe nach mit einer der Axen zusammenfallen läßt.

$l_x\ l_y\ l_z$
$m_x\ m_y\ m_z$
$n_x\ n_y\ n_z$

1). $OG = OX$

$$\cos r = 1;\ \cos s = 0;\ \cos t = 0;$$
$$d = a.$$

2). $OG = OY$

$$\cos r = 0;\ \cos s = 1;\ \cos t = 0;\ d = b.$$

3). $OG = OZ$

$$\cos r = 0;\ \cos s = 0;\ \cos t = 1;\ d = c,$$

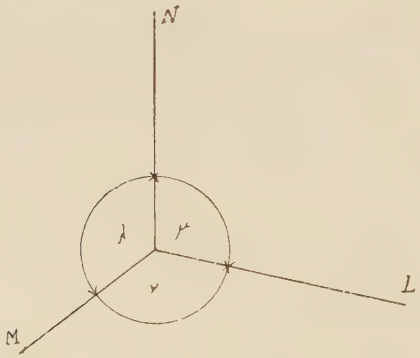
das giebt:

$$\cos l_x = \frac{1}{\sin a} = \frac{\cos^2 a}{\sin a} = \sin a.$$

28).
$$\cos l_y = -\cos b\ \operatorname{ctg} a$$
$$\cos l_z = -\cos c\ \operatorname{ctg} a;$$
28).

$$\cos m_x = -\cos a\ \operatorname{ctg} b; \qquad \cos n_x = -\cos a\ \operatorname{ctg} c;$$
$$\cos m_y = \sin b; \qquad \cos n_y = -\cos b\ \operatorname{ctg} c;$$
$$\cos m_z = -\cos c\ \operatorname{ctg} b; \qquad \cos n_z = \sin c.$$

4. Winkel zwischen den Axenbildern



$\lambda\ \mu\ \nu$ Für die Winkel $\lambda\,\mu\,\nu$ welche die Axenbilder unter sich einschließen, folgt aus vorigem:

$$\cos\lambda = -\cos m_x \cos n_x + \cos m_y \cos n_y + \cos m_z \cos n_z$$
$$= \cos^2 a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c - \sin b \cos b \operatorname{ctg} c - \sin c \cos c \operatorname{ctg} b$$
$$= \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c\,(\cos^2 a - \sin^2 b - \sin^2 c).$$

Es ist aber:

29). 29). $$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 \text{ und}$$
$$3 - \sin^2 a - \sin^2 b - \sin^2 c = 1.$$

Demnach wird:

30). 30). $\cos\lambda = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$; und analog:
$\cos\mu = -\operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} a$,
$\cos\nu = -\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b$.

Nach einigen goniometrischen Umformungen erhält man in Verbindung mit 29).

31). 31). $$\sin\lambda = \frac{\cos a}{\sin b \sin c};\ \sin\mu = \frac{\cos b}{\sin c \sin a};\ \sin\nu = \frac{\cos c}{\sin a \sin b};$$

und 32).

$$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{\cos a}{\cos b \cos c};\ \operatorname{tg}\mu = -\frac{\cos b}{\cos c \cos a};\ \operatorname{tg}\nu = -\frac{\cos c}{\cos a \cos b};\quad 32).$$

Bildet man mittelst der Gleichungen 30 und 31 die Ausdrücke sin $(\lambda + \mu)$ und cos $(\lambda + \mu)$, so erhält man:

$$\sin(\lambda + \mu) = -\sin\nu;$$

$$\cos(\lambda + \mu) = \cos\nu;\ \text{woraus folgt;}$$

$$33).\qquad \lambda + \mu + \nu = 360^{\circ},\qquad 33).$$

wie es die geometrische Bedeutung dieser Winkel verlangt.

Sind umgekehrt die Winkel $\lambda\ \mu\ \nu$ zwischen den Axenbildern gegeben, so findet man die Stellungswinkel des Sehstrahls durch Auflösung der Gleichungen 32) und 30) nach a b c:

$$34).\ \cos a = \sqrt{\operatorname{ctg}\mu \operatorname{ctg}\nu};\quad \operatorname{tg} a = \sqrt{-\frac{\cos\lambda}{\cos\mu \cos\nu}};\quad 34).$$

$$\cos b = \sqrt{\operatorname{ctg}\nu \operatorname{ctg}\lambda};\quad \operatorname{tg} b = \sqrt{-\frac{\cos\mu}{\cos\nu \cos\lambda}};$$

$$\cos c = \sqrt{\operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\mu};\quad \operatorname{tg} c = \sqrt{-\frac{\cos\nu}{\cos\lambda \cos\mu}};$$

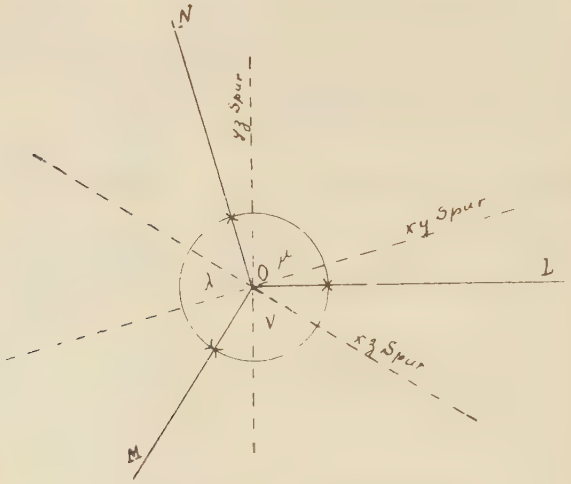
$$\sin a = \sqrt{-\frac{\cos\lambda}{\sin\mu \sin\nu}};$$

$$\sin b = \sqrt{-\frac{\cos\mu}{\sin\nu \sin\lambda}};$$

$$\sin c = \sqrt{-\frac{\cos\nu}{\sin\lambda \sin\mu}};$$

Sehstrahl und Z Axe sind die Normalen auf Bildebene und X Y Ebene; die durch diese Normalen gelegte Ebene steht senkrecht zur Schnittlinie der Bildebene und x y Ebene; zugleich ist sie die projicierende Ebene, welche das Axenbild O N der z Axe auf der Bildebene ausschneidet; daher steht O N senkrecht zur Spur der x y Ebene in der Bildebene. Sind die Axenbilder O L, O M, O N gegeben, so erhält man die Spuren der Coordinatenaxen als Lote auf die Axenbilder.

Die Winkel dieser Spuren mit O N sind:



N xy Spur	90°
N yz Spur	$\mu + 90^\circ$
N zx Spur	$\lambda - 90^\circ$.

Geht die Bildebene nicht durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems, so bilden die Spuren der Fig. 13. Cordinatenebenen ein Dreieck (Fig. 13), in welchem

die Abbildungen der Axen die Höhenlinien sind. Dieses sogenannte Spurendreieck ist gewöhnlich spitzwinklig, da sein Höhenschnittpunkt im allgemeinen ein innerer Punkt sein muß und nur in einer Grenzlage auf dem Umfang liegen kann.

Ist die Spur einer Coordinatenebene, z. B. der x y Ebene in L M und das Bild O' des Coordinatenanfangspunktes O gegeben, so läßt sich das Axenkreuz in der Bildebene leicht folgendermaßen konstruieren. Wir klappen (Fig. 13) das Dreieck L M O in die Bildebene um L M als Axe um, dann kommt O nach O_1 und L M O_1 ist ein rechtwinkliges Dreieck, wobei O_1 D O' $\perp$ L M ist. Wir projicieren ferner das Axenkreuz auf eine zu L M senkrechte Ebene und legen um ihre (zu L M senkrechte) Spur L' N' um. Das Dreieck L O M zeigt sich dann als die Gerade L' O'' und die Z Axe als O'' N, und zwar sind O'' und L' dadurch bestimmt, daß Dreieck L' O'' N' rechtwinklig ist und L' O'' = D O_1 wird. Wir sehen demnach, daß die Projektion von z auf die Bildebene die zu L M senkrechte O' N wird, auf welcher sich aus N' der Schnittpunkt der Z Axe mit der Bildebene ergiebt. Es ist dann L M N das Spurendreieck und die Axenbilder sind die Höhenlinien dieses Dreiecks L O' M O' N O'.

Sind umgekehrt die Axenrichtungen gegeben, so läßt sich aus dem Vorigen leicht das Spurendreieck konstruieren.

5. Die Verhältniszahlen und Verkürzungsverhältnisse.

Tragen wir die beliebige Strecke d auf jede der drei Axen auf, und sind deren Projektionen auf die Bildebene bezw. l, m, n, so seien:

$$L = \frac{l}{d}; \quad M = \frac{m}{d}; \quad N = \frac{n}{d};$$

L M N. wobei L M N die Verkürzungsverhältnisse und l m n die Verhältniszahlen sind; letztere verhalten sich zu einander wie die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse. Es ist aber auch, da die Coordinatenaxen mit der Bildebene die Winkel:

$$(90^\circ - a) \quad (90^\circ - b) \quad (90^\circ - c) \text{ bildet,}$$

35). 35). $L = \frac{l}{d} = \sin a; \quad M = \frac{m}{d} = \sin b; \quad N = \frac{n}{d} = \sin c;$

oder da:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

und $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2$ ist,

so ist auch:

36). 36). $L^2 + M^2 + N^2 = 2$ und

$l^2 + m^2 + n^2 = 2d^2$.

Führt man in den Gleichungen 30) 31) 32)

$\cos a = \sqrt{1 - L^2}; \quad \cos b = \sqrt{1 - M^2}; \quad \cos c = \sqrt{1 - N^2}$

so erhält man die Axenwinkel unmittelbar durch die Verkürzungsverhältnisse ausgedrückt:

37). 37). $\cos \lambda = -\frac{1}{M.N} \sqrt{(1 - M^2)(1 - N^2)};$

$$\cos \mu = -\frac{1}{N.L} \sqrt{(1 - N^2)(1 - L^2)};$$

$$\cos \nu = -\frac{1}{L.M} \sqrt{(1 - L^2)(1 - M^2)};$$

$$\operatorname{tg} \lambda = -\sqrt{\frac{1 - L^2}{(1 - M^2)(1 - N^2)}};$$

$$\operatorname{tg} \mu = -\sqrt{\frac{1 - M^2}{(1 - N^2)(1 - L^2)}};$$

$$\operatorname{tg} \nu = -\sqrt{\frac{1 - N^2}{(1 - L^2)(1 - M^2)}};$$

$$\sin \lambda = \frac{1}{M \cdot N}\sqrt{1 - L^2};$$

$$\sin \mu = \frac{1}{N \cdot L}\sqrt{1 - M^2};$$

$$\sin \nu = \frac{1}{L \cdot M}\sqrt{1 - N^2}.$$

und umgekehrt ergeben sich nach 34) die Verkürzungsverhältnisse aus den Axenwinkeln durch:

38). $L = \sqrt{-\frac{\cos \lambda}{\sin \mu \sin \nu}}$; $M = \sqrt{-\frac{\cos \mu}{\sin \nu \sin \lambda}}$; 38).

$$N = \sqrt{-\frac{\cos \nu}{\sin \lambda \sin \mu}}.$$

Die Verhältniszahlen l m n sind identisch mit den Axenabschnitten der Bildebene, wenn diese nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Es besteht also die Gleichung:

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1;$$

und man erhält für die Richtungscosinusse der Normalen oder des Sehstrahls:

39). $$\cos a = \frac{\frac{1}{l}}{\sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}};$$

$$\cos b = \frac{\frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}};$$

$$\cos c = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}};$$

oder auch:

39a). $$\sin a = l\sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}} = L;$$

$$\sin b = m\sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}} = M;$$

$$\sin c = n\sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}} = N.$$

Nachdem in 30) erhaltenen Ausdruck $\cos \lambda = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$ folgt:

40). $$\left\{\begin{array}{l} \cos \lambda = -\frac{\sqrt{(l^2 - m^2 + n^2)(l^2 + m^2 - n^2)}}{2 m n}; \\ \cos \mu = -\frac{\sqrt{(m^2 + n^2 - l^2)(l^2 + m^2 - n^2)}}{2 l n}; \\ \cos \nu = -\frac{\sqrt{(l^2 - m^2 + n^2)(m^2 + n^2 - l^2)}}{2 l m}; \end{array}\right.$$

oder:

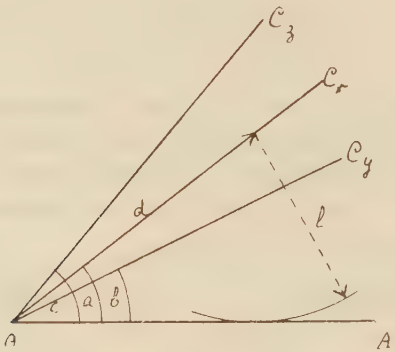
$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\lambda = -\sqrt{\dfrac{(l^2+m^2+n^2)\,(-l^2+m^2+n^2)}{(l^2-m^2+n^2)\,(l^2+m^2-n^2)}}, \\ \operatorname{tg}\mu = -\sqrt{\dfrac{(l^2+m^2+n^2)\,(l^2-m^2+n^2)}{(-l^2+m^2+n^2)\,(l^2+m^2-n^2)}}, \\ \operatorname{tg}\nu = -\sqrt{\dfrac{(l^2+m^2+n^2)\,(l^2+m^2-n^2)}{(-l^2+m^2+n^2)\,(l^2-m^2+n^2)}}. \end{array}\right.$$

Gewöhnlich werden einfache Verhältniszahlen gebraucht, weil die Berechnung der Axenkreuze dadurch einfacher wird. Mit Hilfe obiger Formeln für cos λ oder tg λ u. s. w. werden die Axenwinkel in der folgenden Tabelle berechnet:

	Verhältniszahlen			Verkürzungsverhältnisse			Axenwinkel		
	l	m	n	sin a	sin b	sin c	λ	μ	ν
I.	1	1	1	0.816	0.816	0.816	120	120	120°
II.	2	1	2	0.943	0.471	0.943	131 24½′	97° 11′	131° 24½′
	3	1	3	0.973	0.324	0.973	133 24½′	93° 11′	133° 24½′
	4	1	4	0.985	0.246	0.985	134 6¼′	91° 47½′	134° 6¼′
III.	9	5	10	0.887	0.493	0.985	107 49′	95° 11′	157°
	17	6	18	0.944	0.333	0.999	96 23′	90° 47½′	172° 49½′
	5	4	6	0.806	0.645	0.967	108 13′	101° 10′	150° 35′
	7	6	8	0.811	0.695	0.927	114 46′	106° 59½′	138° 14½′

Siehe Fiedler, Darstellende Geometrie Leipzig 1875 pag. 199, und Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig 1884, I. Band pag. 438.

Die Verhältniszahlen lassen sich auch ohne Berechnung nur durch Konstruktion folgendermaßen leicht finden. Man zieht durch O gegen O A Strahlen unter den Winkeln a b c und trägt darauf die Längeneinheit ab.



Der senkrechte Abstand des Endpunktes dieser Strahlen von O A ergibt die Verkürzung der Längeneinheit auf der zugehörigen Axe.

6. Die drei Arten der Orthogonalprojektion.

Den Fall I in obiger Tabelle mit gleichen Verhältniszahlen nennt man den der isometrischen Projektion; den Fall II mit zwei gleichen Verhältniszahlen den der dimetrischen oder monodimetrischen, den III mit drei verschiedenen Verhältniszahlen den der trimetrischen oder anisometrischen Projektion.

Die isometrische Projektion ist wegen der Gleichheit der Verhältniszahlen die bequemste. Der Würfel bildet sich als regelmäßiges Sechseck (Fig. 9) ab, in dessen Mittelpunkt sich zwei Würfelecken pro-

Fig. 9.

jicieren. Die Diagonale, welche diese beiden Ecken verbindet, und die Halbierungsebenen der Flächenwinkel, welche durch diese Diagonale gehen, stehen auf der Bildebene senkrecht, bilden sich daher nur als Punkt, bezw. als Gerade ab. Deswegen eignet sich diese Projektion wenig für Körper, bei welchen wichtige Linien oder Ebenen eine solche Richtung besitzen.

Bei der dimetrischen Projektion werden zwei Axen und zwei Axenebenen gleichartig verändert, und eine durch die ausgezeichneten Axen gehende Halbierungsebene steht auf der Projektionsebene senkrecht. Die dadurch bedingten Nachteile treten nicht auf bei Gegenständen, welche nicht nach allen drei Richtungen gleichartig ausgebildet sind.

Den besten Eindruck machen die trimetrischen Projektionen, wenn man die senkrechte Axe nur wenig verkürzt gegenüber der anderen annimmt. Man erhält dann mehr den Eindruck einer Vorderansicht.

7. Das Bild des Kreises in senkrechter Projektion.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, daß die orthogonale Projektion eines Kreises eine Ellipse ist, deren große Axe dem Kreisradius gleichkommt, und deren kleine Axe erhalten wird, indem man den Kreisradius mit dem Cosinus des Winkels zwischen Kreisnormale und Sehstrahl multipliziert. Sind wie vorhin a b c die Stellungswinkel des Sehstrahls und r s t die der Kreisnormalen, g die Neigung der Normale gegen den Sehstrahl, so ist: r s t g

42). $\cos g = \cos a \cos r + \cos b \cos s + \cos c \cos t.$ 42.)

R Ist R der Radius des Kreises, so sind demnach die Halbaxen seines Bildes:

$$R \text{ und } R \cos g.$$

Auf analytische Weise läßt sich obiges Resultat auch sehr leicht ableiten, wenn wir die Richtung des Sehstrahles so fixieren, daß sie mit einer der Cordinatenaxen z. B. mit der Z Axe, übereinstimmt; also die Bildebene mit der x y Ebene zusammenfällt. Es wird demnach:

$$a = 90^0;\ b = 90^0;\ c = 0^0;\ g = t;$$

Wir erhalten dann als Gleichung der Cylinderfläche, die wir um den Kreis mit den Normalenrichtungen r s t mit der Richtung $90^0\ 90^0\ 0^0$ als Erzeugende beschreiben, nach Gleichung 8):

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{x \cos r + y \cos s + z \cos t}{\cos t}\right)^2 = R^2.$$

Der Schnitt dieses Cylinders mit der Bildebene $z = 0$ ergibt:

43). 43). $x^2 \sin^2 s + y^2 \sin^2 r + 2xy \cos r \cos s - R^2 \cos^2 t = 0$

als Gleichung der Abbildung des Kreises in senkrechter Projektion.

Die Umformung dieser Gleichung in eine auf die Hauptaxen bezogene geschieht nach IV. indem hier:

$$a_{11} = \sin^2 s$$
$$a_{22} = \sin^2 r$$
$$a_{12} = \cos r \cos s \text{ sind.}$$

Dies ergibt für IV e:

$$\lambda = {}^1/_2 (\sin^2 s + \sin^2 r \pm (\cos^2 r + \cos^2 s))$$

oder $\lambda_0 = 1;\ \lambda_1 = \cos^2 t.$

Die auf die Hauptaxen bezogene Gleichung lautet nach IV d:

$$44). \quad \frac{X^2}{R^2 \cos^2 t} + \frac{Y^2}{R^2} = 1.$$

Machen wir uns jetzt von der Annahme frei, daß die Richtung des Sehstrahls mit der Z Axe übereinstimmen soll, sondern nehmen wir jene beliebig an mit den Richtungswinkeln a b c, so wird die Gleichung 44).

$$45). \quad \frac{X^2}{R^2 \cos^2 g} + \frac{Y^2}{R^2} = 1; \qquad 45).$$

wobei g aus Gleichung 42) erhalten wird.

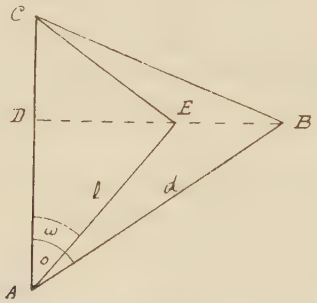
Wir sehen also auch hier, daß die große Axe der Ellipse = R, die kleine = R cos g ist.

8. Winkel der Hauptaxen mit den Coordinatenaxen und den Axenbildern.

Gleichung 45 lehrt, daß die große Axe unverkürzt in der wahren Länge des Kreisdurchmessers erscheint; somit muß die Gerade, deren Bild sie ist, mit der Zeichenebene parallel sein, sie muß demnach mit der Schnittlinie der Kreis- und Bildebene zusammenfallen. Die Richtungswinkel der Normalen dieser beiden Ebenen sind r s t und a b c, der Winkel zwischen diesen Normalen = g; dann sind nach III. die Richtungscosinusse der Schnittlinie beider Ebenen oder der großen Ellipsenaxe:

$$47). \quad \begin{cases} \cos o = \dfrac{\cos s \cos c - \cos t \cos b}{\sin g}; \\ \cos p = \dfrac{\cos t \cos a - \cos r \cos c}{\sin g}; \\ \cos q = \dfrac{\cos r \cos b - \cos s \cos a}{\sin g}; \end{cases}$$

Um die Winkel der großen Axe mit den Axenbildern, speziell mit dem Bilde der X Axe zu erhalten, denken wir uns auf der X Axe vom Coordinatenanfang aus die Längeneinheit d abgetragen, ihre Projektion auf die Bildebene sei l und das Bild der X Axe schließe mit der großen Halbaxe den Winkel ω ein. Es stelle in untenstehender Figur A C die große Halbaxe und A E = l das Bild der X Axe dar. C A E ist dann der gesuchte Winkel ω.



Das Dreieck im Raum, dessen Projektion A C E ist, klappen wir um A C als Drehaxe in die Bildebene herunter nach A B C; in demselben ist A B = d und ∠ C A B der oben berechnete Winkel o zwischen x Axe und großer Halbaxe.

Nun ist $$\cos \omega = \frac{AD}{AE} = \frac{d \cos o}{l};$$

also $$\cos \omega = \frac{d}{l} \frac{\cos s \cos c - \cos t \cos b}{\sin g};$$ oder nach 35).

48). $$\cos \omega = \frac{\cos s \cos c - \cos t \cos b}{\sin a \sin g};$$ und analog

$$\cos \pi = \frac{\cos t \cos a - \cos r \cos c}{\sin b \sin g};$$

$$\cos \varkappa = \frac{\cos r \cos b - \cos s \cos a}{\sin c \sin g};$$

als Winkel zwischen den Axenbildern und der großen Axe der Bildellipse.

Die kleine Axe ist die Schnittlinie der Bildebene und der Ebene durch Sehstrahl und Kreisnormale. Die Normalen dieser beiden Ebenen haben die Richtungen a b c und o p q und stehen auf einander senkrecht, somit sind die Richtungscosinusse ihrer Schnittlinie oder der kleinen Axe nach III a:

$$\cos o_1 = \cos q \cos b - \cos p \cos c;$$
$$\cos p_1 = \cos o \cos c - \cos q \cos a;$$
$$\cos q_1 = \cos p \cos a - \cos o \cos b;$$

oder mit Einsetzung der Werte aus 47).

$$\cos o_1 = \frac{\cos r \sin^2 a - \cos a (\cos c \cos t + \cos b \cos s)}{\sin g};$$

$$\cos p_1 = \frac{\cos s \sin^2 b - \cos b (\cos a \cos r + \cos c \cos t)}{\sin g};$$

$$\cos q_1 = \frac{\cos t \sin^2 c - \cos c (\cos b \cos s + \cos a \cos r)}{\sin g}.$$

oder:

49). $$\begin{cases} \cos o_1 = \dfrac{\cos r - \cos a \cos g}{\sin g}; \\ \cos p_1 = \dfrac{\cos s - \cos \quad \cos g}{\sin g}; \\ \cos q_1 = \dfrac{\cos t - \cos c \cos g}{\sin g}; \end{cases}$$ 49).

Daraus ergeben sich die Winkel zwischen der kleinen Axe und den Axenbildern analog der Beziehung zwischen den Gleichungen 47) und 48). Wir erhalten also:

50). $$50).\quad \begin{cases} \cos \omega_1 = \dfrac{\cos r - \cos a \cos g}{\sin a \sin g}; \\ \cos \pi_1 = \dfrac{\cos s - \cos b \cos g}{\sin b \sin g}; \\ \cos \varkappa_1 = \dfrac{\cos t - \cos c \cos g}{\sin c \sin g}; \end{cases}$$

Die Gleichungen 47) und 49) geben die Richtungswinkel derjenigen Kreisdurchmesser an, die in der Projektion als Hauptaxen der Ellipse erscheinen. Die Gleichungen dieser Kreisdurchmesser lauten demnach:

47 a). $$\frac{x}{\cos s \cos c - \cos t \cos b} \quad \frac{y}{\cos t \cos a - \cos r \cos s} = \frac{z}{\cos r \cos b - \cos s \cos a};$$ und:

49 a). $$\frac{x}{\cos r - \cos a \cos g} \quad \frac{y}{\cos s - \cos b \cos g} = \frac{z}{\cos t - \cos c \cos g};$$

Wir finden hier in leichter Weise, daß diese beiden Geraden, die auch in der Projektion auf einander senkrecht stehen, mit einander einen rechten Winkel einschließen. (cf. pag. 18.) Es wird nämlich:

$$(\cos s \cos c - \cos t \cos b)(\cos r - \cos a \cos g) +$$
$$+ (\cos t \cos a - \cos r \cos s)(\cos s - \cos b \cos g) +$$
$$+ (\cos r \cos b - \cos s \cos a)(\cos t - \cos c \cos g) = 0.$$

9. Bilder der Spuren des Kreises.

Es seien zwei Kreisnormalen gegeben durch ihre Stellungswinkel d e f und d_1 e_1 f_1; ihre Winkel gegen den Sehstrahl (a b c) seien: d e f d_1 e_1 f_1

$$\begin{cases} \cos v = \cos a \cos d + \cos b \cos e + \cos c \cos f; \text{ und:} \\ \cos v_1 = \cos a \cos d_1 + \cos b \cos e_1 + \cos c \cos f_1. \end{cases} \quad 51).$$

Die beiden Kreisebenen schneiden sich in einer Geraden, welche auf jeder der beiden Kreisnormalen senkrecht steht; für ihre Stellungswinkel r_0 s_0 t_0 gelten also die Bedingungen: r_0 s_0 t_0

$$\cos r_0 \cos d + \cos s_0 \cos e + \cos t_0 \cos f = 0;$$
$$\cos r_0 \cos d_1 + \cos s_0 \cos e_1 + \cos t_0 \cos f_1 = 0;$$
$$\cos^2 r_0 + \cos^2 s_0 + \cos^2 t_0 = 1.$$

aus diesen folgt (cf. III a):

$$52). \quad \begin{cases} \cos r_0 = \dfrac{\cos e \cos f_1 - \cos e_1 \cos f}{\sin h}; \\ \cos s_0 = \dfrac{\cos f \cos d_1 - \cos f_1 \cos d}{\sin h}; \\ \cos t_0 = \dfrac{\cos d \cos e_1 - \cos d_1 \cos e}{\sin h}; \end{cases} \quad 52).$$

wo h der Winkel zwischen den beiden Kreisnormalen ist, gewonnen aus:

$$\cos h = \cos d \cos d_1 + \cos e \cos e_1 + \cos f \cos f_1$$

Nun berechne man den Winkelabstand w_0 der Schnittlinie beider Kreisebenen vom Sehstrahl aus:

$$53). \quad \cos w_0 = \cos r_0 \cos a + \cos s_0 \cos b + \cos t_0 \cos c. \quad 53).$$

Sind ϱ_0 σ_0 τ_0 die Winkel zwischen dem Bilde der Schnittlinie und den Axenbildern, so lassen sich ϱ σ τ

diese unter Benützung der in Gl. 27 und 28 gebrauchten Bezeichnungen berechnen aus:

$$\cos \varrho_0 = \cos r^1_0 \cos l_x + \cos s^1_0 \cos l_y + \cos t^1_0 \cos l_z ;$$
$$\cos \sigma_0 = \cos r^1_0 \cos m_x + \cos s^1_0 \cos m_y + \cos t^1_0 \cos m_z ;$$
$$\cos \tau_0 = \cos r^1_0 \cos n_x + \cos s^1_0 \cos n_y + \cos t^1_0 \cos n_z ;$$

Führt man hier die Werte von 27) und 28) ein, so kommt:

$$\cos \varrho_0 = \left(\frac{\cos r_0}{\sin w_0} - \cos a \operatorname{ctg} w_0\right) \sin a -$$
$$- \left(\frac{\cos s_0}{\sin w_0} - \cos b \operatorname{ctg} w_0\right) \cos b \operatorname{ctg} a -$$
$$- \left(\frac{\cos t_0}{\sin w_0} - \cos c \operatorname{ctg} w_0\right) \cos c \operatorname{ctg} a;$$

$$\cos \varrho_0 = \frac{\operatorname{ctg} a}{\sin w_0}\left(\frac{\cos r_0}{\cos a} \sin^2 a - \cos s_0 \cos b - \cos t_0 \cos c\right)$$
$$+ (\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} w_0 (- \sin^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c))$$

Nach Gleichung 29) verschwindet die zweite Klammer; die erste kann mittelst Gleichung 26) vereinfacht werden, so daß:

$$\cos \varrho_0 = \frac{\operatorname{ctg} a}{\sin w_0}\left(\frac{\cos r_0}{\cos a} - \cos w_0\right) \text{ wird oder:}$$

54). 54).
$$\begin{cases} \cos \varrho_0 = \dfrac{\cos r_0 - \cos a \cos w_0}{\sin a \sin w_0} \text{ und analog;} \\ \cos \sigma_0 \quad \dfrac{\cos s_0 - \cos b \cos w_0}{\sin b \sin w_0}; \\ \cos \tau_0 = \dfrac{\cos t_0 - \cos c \cos w_0}{\sin c \sin w_0}; \end{cases}$$

Dies sind wie gesagt die Winkel des Bildes der Schnittlinie beider Kreisebenen mit den Axenbildern O L, O M, O N.

Lassen wir speziell die zweite Kreisnormale mit der X Axe zusammenfallen, so handelt es sich um die Abbildung der Spur der Kreisebene in der y z-Ebene. In diesem Falle wird (Bezeichnungen siehe pag. 45):

$$d_1 = 0;\ e_1 = 90^0\ f_1 = 90^0$$
$$w_1 = a \quad h = d,$$

und die Gleichungen 52) lauten:

$$55).\quad \begin{cases} \cos r_x = 0 \\ \cos s_x = \dfrac{\cos f}{\sin d}; \\ \cos t_x = -\dfrac{\cos e}{\sin d} \end{cases} \qquad 55).$$

als Richtungswinkel der Kreisspur in der y z Ebene.

Gleichung 53) wird:

$$56).\ \cos w_x = \frac{\cos f \cos b - \cos e \cos c}{\sin d} \qquad 56).$$

und die Gleichung 54):

$$\begin{cases} \cos \varrho_x = -\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} w_x \\ \cos \sigma_x = \dfrac{\cos f - \cos^2 b \cos f + \cos e \cos b \cos c}{\sin d \sin b \sin w_x} = \\ \qquad \dfrac{\cos f \sin b + \cos e \cos c \operatorname{ctg} b}{\sin d \sin w_x}; \\ \cos \tau_x = \dfrac{-\cos e - \cos f \cos b \cos c + \cos e \cos^2 c}{\sin d \sin c \sin w_x} = \\ \qquad = \dfrac{\cos e \sin c + \cos f \cos b \operatorname{ctg} c}{\sin d \sin w_x}. \end{cases} \qquad 57).$$

Analog findet man für die Winkel ϱ_y σ_y τ_y

welche das Bild der Spur der Kreisebene in der x z Ebene mit den Axenbildern einschließen, wenn:

$$\cos w_y = \frac{\cos d \cos c - \cos f \cos a}{\sin e}$$

gesetzt wird:

58).
$$\cos \varrho_y = -\frac{\cos f \sin a + \cos d \cos c \operatorname{ctg} a}{\sin e \sin w_y}$$

$$\cos \sigma_y = -\operatorname{ctg} e \operatorname{ctg} w_y$$

$$\cos \tau_y = -\frac{\cos d \cos c + \cos f \cos a \operatorname{ctg} c}{\sin e \sin w_y}$$

endlich für das Bild der Spur auf der x y Ebene:

59).
$$\cos w_z = \frac{\cos e \cos a - \cos d \cos b}{\sin f};$$

$$\cos \varrho_z = -\frac{\cos e \sin a + \cos d \cos b \operatorname{ctg} a}{\sin f \sin w_z}$$

$$\cos \sigma_z = -\frac{\cos d \sin b + \cos e \cos a \operatorname{ctg} b}{\sin f \sin w_z};$$

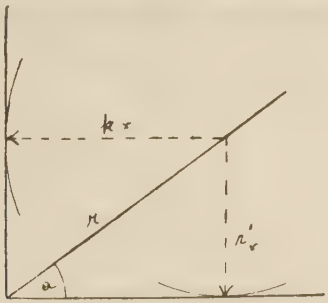
$$\cos \tau_z = -\operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} w_z$$

10. Umriss der Kugel in Orthogonalprojektion.

Bei der Abbildung der Kugel in Orthogonalprojektion erscheint ihr Umriß als Kreis, während er bei der schiefen Projektion zu einer Ellipse wird. Um den Kugelumriß zu konstruieren, nehmen wir
Fig. 14. an (Fig. 14), daß die Kugel auf der X Y Ebene aufliegt und ihr Berührungspunkt M' mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfällt. Dann liegt der

Kugelmittelpunkt M in der Z Axe. Durch M geht auch die Bildebene; ferner sei die beliebig durch M' gezogene Gerade M' A das Bild der X Axe und der beliebig auf ihr gewählte Punkt A ein Punkt der Bildebene. Das Bild der Y Axe ergibt sich dann aus der Bedingung M"B ⊥ M A (cf. pag. 29) und die Spur B der y Axe in der Bildebene wird erhalten, indem man aus A das Lot auf M M' fällt.

Die Fig. 10, 11, 12 stellen drei Kreise, die in den Coordinatenebenen liegen, in isometrischer, dimetrischer und trimetrischer Projektion dar. Wie man sieht, werden alle drei Kreise als Ellipsen abgebildet, ihre Umhüllungskurve ist aber ein Kreis. Die große Halbaxe sämtlicher Ellipsen steht auf der dritten Coordinatenaxe senkrecht und ist gleich der wahren Größe des Kreishalbmessers. Die kleine Halbaxe hat den Wert $k = \sqrt{r^2 - r'^2}$; wo r' die Größe des auf der betreffenden Coordinatenaxe aufgetragenen Kreisradius bedeutet. Mit Hilfe der Fi- Fig. 10, 11, 12



gur kann man sich leicht die kleine Ellipsenaxe k konstruieren. Für die dimetrische Projektion 2 : 1 : 2 ist:

$$r'_x = r'_z = \frac{2\sqrt{2}}{3} r; \quad k_x = k_z = \frac{r}{3}$$

Cf. Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte", Berlin 1902 I. Band pag. 130.

Axonometrie und schiefe Projektion.

Die am meisten verbreitete Projektionsart ist unzweifelhaft die schiefe Projektion, wohl wegen ihrer großen Einfachheit. In der Tat ist es außerordentlich leicht, einen Gegenstand in schiefer Projektion darzustellen; das Axenkreuz kann beliebig gezeichnet werden; gewöhnlich stellt man zwei von den Axen senkrecht zu einander. Dadurch gewinnt die schiefe Projektion den Vorzug, daß alle mit der einen ausgezeichneten Axenebene parallele Figuren in ihrer wahren Gestalt abgebildet werden, und daß man die darauf senkrechten Linien in willkürlicher Richtung nach beliebigem Verkürzungsmaßstabe zufügen darf. Sie hat aber den Nachteil, daß die Sehrichtung, unter welcher sie den der Wahrheit am nächsten kommenden Eindruck macht (der wahre kann wegen des in unendlicher Ferne angenommenen Auges nie erreicht werden) gegen die Bildfläche schief steht, so daß bei der unwillkürlich eingenommenen Gegenüberstellung des Auges der Eindruck ein fehlerhafter ist. Dies tritt am deutlichsten hervor bei der schiefen Projektion des Kugelumrisses.

Die senkrechte Projektion dagegen ergiebt als Kugelumriß einen Kreis. Ihr geht die große Einfachheit der schiefen Projektion aus dem Grunde ab, weil in keiner der Projektionsebenen die Figur in wahrer Größe erscheint, wie dies bei der schiefen Projektion der Fall ist. In der Tat zeigt die Figur 10, 11, 12, die drei Kreise in den Coordinatenebenen darstellt, drei Ellipsen. Allerdings sind diese insofern leicht zu konstruieren, da die kleine Axe dieselbe Richtung hat, wie die auf der Ebene des Kreises senkrecht stehende Axe. Der Umriß der Kugel bleibt

hingegen bei der Orthogonalprojektion ein Kreis, dessen Radius in wahrer Größe erscheint.

Im allgemeinen kann man sagen, daß die senkrechte Projektion schönere Bilder liefert, die schiefe aber die größere Einfachheit für sich hat. Man wird deshalb letztere Projektionsart überall anwenden, wo bei einem Körper eine bestimmte Ebene hervorgehoben werden muß, die dann der Bildebene parallel gestellt wird. Treten aber in dem Körper nicht bloß gerade Linien und ebene Flächen, sondern Kreise in verschiedenen Stellungen, Kreiszylinder = Kreiskegel = Kugel- und beliebige Umdrehungsflächen auf, so ist die senkrechte Projektion vorzuziehen.

Construktionsangaben.

1. Construktion der Hauptaxen der Ellipse aus conjugierten Durchmessern.

Zwei Durchmesser eines Kegelschnitts sind konjugiert, wenn jeder die zu dem andern parallel gezogenen Sehnen halbiert. — Daraus ist ohne weiteres klar, daß beim Kreise jedes Paar auf einander senkrechter Durchmesser konjugiert ist. Im Bilde projizieren sich diese Durchmesser ebenfalls als konjugierte Durchmesser des Kreisbildes, doch sind diese im allgemeinen nicht mehr auf einander senkrecht. Fig. 15 zeigt die Entstehung der Ellipse als affines Bild des Kreises. Nur wenn die Schnittpunkte F und E des auf einander senkrechten konjugierten Durchmesser des Kreises mit der Affinitatsaxe und die Mittelpunkte M‘ des Kreises und M des Kreisbil- Fig. 15.

des auf einer Kugelfläche liegen, projizieren sich die konjugierten Durchmesser des Kreises senkrecht auf einander ab und sind die Axen der Ellipse.

Bei jeder Figur, in der Kreise in Parallelprojektion abgebildet werden sollen, haben wir die Aufgabe zu lösen, eine Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser zu bestimmen. Im Folgenden geben wir deshalb die drei einfachsten Konstruktionen der Axen einer Elipse aus den gegebenen konjugierten Durchmesser. Alle drei Konstruktionen sind üblich, je nach Lage der konjugierten Durchmesser. Sie schließen sich alle an die Entstehung der Ellipse durch Affinität aus dem Kreise.

Fig. 15. I. Auflösung: (cf. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom., Leipzig 1884, Band I, pag. 240.) Es sei in Fig. 15 M C und M D die konjugierten Halbmesser der Ellipse; man lege einen Kreis vom Radius M' C' = M C, der in D die Ellipse berührt. Man kann dann die gemeinschaftliche Tangente D E als Affinitätsaxe zwischen Ellipse und Kreis ansehen, während M M' ein Affinitätsstrahl ist. Der aus einem Punkte der Affinitätsaxe D E durch M und M gelegte Kreis schneidet D E in den Punkten E und F, durch welche die Axen der Ellipse gehen, weil sie zweien, konjugierten Durchmessern des Kreises, nämlich M' A' und M' B' entsprechen und aufeinander senkrecht stehen. Ihre Längen werden aus den entsprechenden Punkten des Kreises durch Collineationsstrahlen A' A und B' B ∥ M' M bestimmt.

Fig. 16. II. Auflösung (cf. Frézier, Théorie de la coupe des pierres, Strasbourg 1754, Band I, pag. 159): Zwei Halbmesser M C und M D der Ellipse (Fig. 16) sind konjugiert, wenn sie aus den zwei auf einander senk-

rechten Halbmessern M C' und M D' des großen und M C'' und M D'' des kleinen Kreises entstanden sind. Verlängert man M C' um C' E = der kleinen Halbaxe b, so ist △ C C' E ≃ D D'' M, weil die Winkel bei C' und D'' einander gleich (die Schenkel stehen auf einander senkrecht), C' E = D'' M = b und CC' = DD'' (wegen der Congruenz der Dreiecke CC' C'' und DD'' D'). Daher ist auch C E = D M und außerdem ⊥ D M, weil in jenen congruenten Dreiecken schon zwei Seiten des einen bezw. auf den ihnen gleichen des anderen senkrecht stehen. Im rechtwinkligen Dreieck CC' D'' ist die Mitte F der Hypotenuse auch der Mittelpunkt des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises, oder es ist:

F C = F C' = F C'' oder auch F E = F M.

Es ergibt sich daher folgende Konstruktion der Axen (Fig. 17). Man ziehe C E ⊥ und = M D; ferner M E; halbiert M E in F, mache auf M E F C' = F C'' = F C, so ist die eine Axe M A ∥ CC'' und = M C', die andere M B ∥ CC' und = M C''. Fig. 17.

III. Auflösung nach Prof. Rytz, Aarau (cf. Moßbrugger. Größtenteils neue Aufgaben aus dem Gebiete der géométrie descriptive, Zürich 1845, pag. 123).

Fig. 18. Man zieht M H ⊥ und = M D, dann HC, halbiert HC in F macht auf HC FA' = FB' = FM, so sind M A' und M B' die Axenrichtungen, deren Längen M A = A' H und M B = B' H aufgetragen werden. Denn man erkennt (Fig. 19), daß, wenn man F C über F um sich selbst bis H verlängert, H die Dreiecke CC' C'' und ECM zu Parallelogrammen ergänzt, so daß MH ⫫ CE, welches seinerseits = und ⊥ M D ist; und wenn man CH mit MA in A' und mit MB in B' schneidet, FM = FA' = FB' (da MA' Fig. 18. Fig. 19.

= MB' Parallelen zu den Grundlinien der Dreiecke FC"C und FCC' sind) und MA = MC' = A'H; MB = MC" = B'H sind (aus demselben Grunde).

2. Das der Ellipse umgeschriebene Achteck.

Fig. 20. Die affine Verwandtschaft der Ellipse mit dem Kreise zeigt Fig. 20. Sind zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse gegeben, so konstruiert man zuerst das umgeschriebene Parallelogramm, indem man durch die Endpunkte des einen Durchmessers Parallelen zum anderen zieht. Aus diesem Parallelogramm kann man aber leicht das umgeschriebene Achteck herstellen. Zu dem Ende trägt man auf dem einen Durchmesser $A A_1$ die Längen $M C = M C_1 = \sqrt{2}\, M A$ auf, welche man an irgend einem in der Zeichnung vorhandenen rechten Winkel bestimmt, zieht durch $M C C_1$ Parallelen zu $B A$ und $B A_1$, so ist das Achteck mit seinen Berührungspunkten gezeichnet.

3. Construktion der Krümmungshalbmesser an den Scheiteln.

Einen bedeutenden Vorteil beim Zeichnen der Bildellipsen gewähren die Krümmungshalbmesser an den Scheiteln der Ellipse. In Parameterform lautet die Ellipsengleichung bekanntlich:

$$x = a \cos t$$
$$y = b \sin t$$

und die Gleichung des Krümmungshalbmessers:

$$\varrho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'\,y'' - y'\,x''};$$

also hieß: $\varrho = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{a\,b}$.

In den Scheiteln ist $t_1 = 0^0$ und $t_2 = 90^0$; demnach $\varrho_1 = \frac{b^2}{a}$; $\varrho_2 = \frac{a^2}{b}$.

Nun fällt man Fig. 21 von D auf AB das Lot, das die Axen in R und S schneidet, dann ist: Fig. 21.

$$RA = \varrho_1 = \frac{b^2}{a}; \; SB = \varrho_2 = \frac{a^2}{b}.$$

Beweis: Dreieck $DAR \sim BDA$

daraus folgt: $AR : DA = DA : BD$

oder $$AR = \frac{DA^2}{BD} = \frac{b^2}{a}$$

und Dreieck $SBD \sim BDA$

$$BS : BD = BD : DA$$

$$BS = \frac{BD^2}{DA} = \frac{a^2}{b}.$$

Es empfiehlt sich, beinahe jedesmal die Krümmungskreise zu konstruieren, da Zeichenfehler an den Scheiteln viel mehr ins Auge fallen als an anderen Stellen.

Besprechung einiger Figuren aus der Litteratur.

Wir erwähnten bereits, daß die in den verschiedenen Lehrbüchern vorkommenden Figuren den Regeln der Projektionslehre nicht immer genügen, und

wollen jetzt unsere Behauptung durch einige Beispiele bestätigen. Wir richten unser Augenmerk nur auf die Figuren in der Literatur; die einzelnen Bücher einer Kritik zu unterziehen, steht uns nicht zu. Zu dieser Besprechung sind die neuesten Auflagen, die wir uns beschaffen konnten, benutzt worden. Vielleicht dürften von dem einen oder anderen Werke neuere Auflagen erschienen sein, in denen die hier erwähnten Figuren abgeändert oder nicht mehr vorhanden sind, so daß das hier darüber Gesagte hinfällig würde.

In dem bekannten Buche „Diesterweg's Populäre Himmelskunde, Berlin" werden z. B. in der sechsten Auflage von 1860 und in der zehnten von 1879 dieselben Figuren von einem verschiedenen Gesichtspunkte aus betrachtet. In beiden zitierten Auflagen stellt auf pag. 11 die Figur 3 dasselbe dar, nämlich: „N W S O N stellt den Horizont dar, N den Nordpunkt, S den Südpunkt, W den West- und O den Ostpunkt, N Z S den Meridian. W b O ist der Aequator, K c R der Wendekreis des Krebses, B a U der des Steinbocks." — Nun steht in der sechsten Auflage „Das Auge des Zeichners ist senkrecht über dem
Fig. 22. Scheitelpunkte Z zu denken" (Fig. 22). Eben diese senkrechte Stellung scheint den Verfasser verleitet zu haben, den Aequator und die Wendekreise als Kreisbogen abzubilden; sie werden aber in schiefer Lage gesehen, müssen deshalb Ellipsen sein. Zur Konstruktion der Axen braucht man die Figur nur
Fig. 23. um 90^0 um die Axe N S umzulegen, wie Fig. 23 zeigt.

In der zehnten Auflage von Diesterweg's Populärer Himmelskunde heißt es ebenfalls pag. 11: „Das Auge des Zeichners ist im Punkte E zu denken"

(Fig. 24). In dieser Zeichnung müßten aber U a B, O b W und R c K über den Kreis S Z N hinaustreten, wie Fig. 25 es zeigt. Fig. 24. Fig. 25.

Den gleichen Unterschied in den beiden erwähnten Auflagen zeigen auch die Figuren 26 und 28, von denen die erstere in der sechsten Auflage als Fig. 5 auf pag. 38, die letztere in der zehnten Auflage als Fig. 5 auf pag. 36 vorkommt. Beide stellen die vier Hauptbogen der Ekliptik am Tage der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche dar. „N W S O N ist der Horizont, N Z S der Meridian, W Q O der Aequator. Lage der Ekliptik am 21. März: Fig. 26 u. 28.

a) Morgens 6 Uhr W G O
b) Mittags 12 Uhr C A K
c) Abends 6 Uhr W L O
d) Mitternachts 12 Uhr R A B.“

Auch bei diesen Figuren gilt das oben bei den Fig. 22 und 24 Gesagte; die Fig. 27 und 29 stellen die richtig konstruierten dar. Fig. 27 u. 29.

In der astronomischen Geographie von Martus (Leipzig 1880), wird die schiefe Projektion angewandt. Wie Fig. 30 zeigt (l. c. pag. 35 Fig. 24) treten die Parallelkreise ganz richtig über den Kreis S Z F N hinaus; das ist ja das Hauptmerkmal der schiefen Projektion. Nur ist darin der vielleicht erst beim Drucke eingeschlichene Fehler, daß die vordere Hälfte der Figur größer ist als die hintere, daß also z. B. B W B $<$ B O ist. Dadurch wird man an Centralprojektion erinnert. Die Fig. 31 (l. c. pag. 111 Fig. 48), die die Bestimmung des Längenunterschiedes darstellt, ist auch in schiefer Projektion gezeichnet, müßte aber aussehen wie Fig. 32. Fig. 30. Fig. 31. Fig. 32.

Lehmann wendet in seinem Buche „Die Erde und der Mond“ (Leipzig, Prag 1884) vielfach die
Fig. 33. senkrechte Projektion an. Die Fig. 33 (Lehmann l. c. pag. 25 Fig. 8) z. B. ist fehlerfrei ausgeführt. We-
Fig. 34. niger dagegen die Fig. 34 (Lehmann l. c. pag. 17 Fig. 5), die die Ortsbestimmung eines Sternes in Bezug auf den Horizont darstellt; darin ist nämlich zum Teile senkrechte, zum Teil schiefe Projektion
Fig. 35. angewandt. Fig. 35 stellt die Zeichnung in schiefer
Fig 36. Projektion dar, Fig. 36 in orthogonaler Projektion. Auch Fig. 37 (Lehmann l. c. pag. 49 Fig. 14) hat etwas von beiden Projektionsarten, das Axenkreuz ist in schiefer Projektion, der Umriß der Kugel aber keine Ellipse, wie er es sein sollte, sondern ein Kreis. Cf. Fig. 5.

In Weiler's Leitfaden der mathematischen Geographie (Leipzig 1881) finden wir ebenfalls Figuren, die dieselbe Eigentümlichkeit, wie die obige aufweisen. Trotzdem Weiler über Parallelprojektion eine sehr lehrreiche Abhandlung geschrieben hat (Leipzig 1896, 2. Aufl.), sind die Figuren in seinem Leitfaden der mathematischen Geographie vom Standpunkt der darstellenden Geometrie aus nicht alle unanfechtbar.
Fig 38. In Fig. 38 (Weiler, l. c. pag. 23 Fig. 11) sind die Axen in schiefer Projektion gezeichnet, da der Meridian als Kreis abgebildet ist. Hingegen sollte aber die Ellipse, die den Horizont darstellt, als konjugierte Durchmesser die Strecken S N und O W haben, die in Wirklichkeit senkrechte Durchmesser des Kreises sind. Es müßte demnach die Ellipse über den Meridankreis hinausragen, wie wir das bei Fig. 5 bemerken. Auch die Parallelkreise müßten dieselbe Eigenschaft aufweisen. — In Newcomb's Populärer

Astronomie (Leipzig 1892, 2. Aufl.) finden wir ähnliche Figuren. In Gelcich's Astronomische Bestimmung der Geographischen Coordination (Leipzig und Wien 1904) finden wir Fig. 39. (Gelcich l. c. pag. 48, Fig. 23), die sowohl ihrer Bedeutung als auch ihrer Anlage nach der Fig. 26 aus Diesterweg's Populärer Himmelskunde gleicht; ihre richtige Konstruktion läßt sich leicht aus Fig. 27 herleiten. Fig. 39.

Der häufigste Fehler bei den Figuren in den astronomischen Lehrbüchern ist der, daß ein Teil der Figur in der senkrechten, ein anderer in der schiefen Projektion gezeichnet ist; in Epstein's Geonomie (Wien 1888); Laska's Lehrbuch der Astronomie (Stuttgart 1889), Günther's Mathematischen Geographie (Stuttgart 1890), Schmidt's Astronomischen Erdkunde (Leipzig und Wien 1903) und anderen, finden wir Figuren, die nach denselben Ideen wie Fig. 37 und 38 angefertigt sind. Die Zeichner haben sich offenbar alle gescheut, die Ellipsen, die die Parallelkreise darstellen, über den Kreis, der den Meridian wiedergiebt, hinaustreten zu lassen; es wäre dadurch der Umriß der Kugel ein elliptischer geworden, und das ist wohl in der schiefen Projektion richtig, aber den meisten nicht bekannt genug, und macht auch einen unwahrscheinlichen Eindruck. Auch in senkrechter Projektion treten die Parallelkreise in der Darstellung über den Meridian hinaus, dieser erscheint aber nicht als Kreis, sondern als Ellipse, hingegen bleibt da, wie bereits erwähnt, der Umriß der Kugel ein Kreis.

Das aber doch manchem Verfasser das nicht ganz Korrekte an seinen Figuren aufgefallen ist, ersehen wir aus Schmidt's Astronomischen Erdkunde

(Leipzig und Wien 1903) pag. 49. „Mathematisch genauer als die perspektivische Darstellung in Fig. 19
Fig. 40. (hier Fig. 40) ist eine solche, ähnlich wie Fig. 20
Fig. 41. (hier Fig. 41) genau von der Ost oder Westseite, etwa den Westpunkt als Augenpunkt aus großer Entfernung genommen (in „orthographischer Projektion"); die Kreise, sowohl der Horizont als die Sonnenbahnen werden zu Geraden, nur der Meridian, querübergestellt, zeigt sich als volle Kreislinie". Todd hat sich in seinem Werk: „A New Astronomy" (New-York, Cincinnati, Chicago) in geschickter Weise zu helfen gewußt, indem er die Photographien von Modellen als Figuren benutzt hat.

Häufig vorkommende Figuren.

Fig. 42. Fig. 42 stellt in schiefer Projektion Höhe und Azimuth, Poldistanz und Stundenwinkel eines Sternes dar. Zur Konstruktion dieser Figur wird zuerst das Axenkreuz gezeichnet, nämlich die Verbindungslinie Zenith-Nadir und Nordpunkt-Südpunkt senkrecht aufeinander, und die Linie Westpunkt-Ostpunkt in beliebigem Winkel dazu (meist 40^0 oder 60^0) und beliebig verkürzt. Der Meridian erscheint als Kreis, da er der Bildebene parellel angenommen wurde. Alle übrigen Kreise erscheinen als Ellipsen, die dadurch konstruiert werden, daß man zwei konjugierte Durchmesser einer jeden sucht, und daraus nach einem der angegebenen Verfahren die Hauptaxen findet. Bekanntlich bilden sich nur zwei aufeinander senkrechte Durchmesser eines Kreises in der Projektion als konjugierte Durchmesser der betref-

fenden Ellipse ab; man hat demnach hier ohne weiteres die Geraden Nordpunkt-Südpunkt und Westpunkt-Ostpunkt als konjugierte Durchmesser für die Horizontellipse, und die Geraden Westpunkt-Ostpunkt und Zenith-Nadir als Durchmesser des ersten Vertikalkreises. Bei allen anderen kommt es darauf an, zwei in Wirklichkeit aufeinander senkrechte Kreisdurchmesser zu finden, die dann in der Projektion als konjugierte Ellipsendurchmesser erscheinen. Beim Zeichnen des Vertikalkreises zum Beispiel verfährt man folgendermaßen:

Der Stern S habe das Azimut 50^0 und die Höhe 40^0. Die Gerade Nordpunkt-Südpunkt ist, wie man gleich bemerkt, Affinitätsaxe zwischen der Horizontellipse und dem Meridiankreise. Trägt man also vom Südpunkt ab auf dem Meridiankreise den Winkel 50^0 ab, und zieht die Colineationsstrahlen parallel Nadir-Mittelpunkt und Mittelpunkt-Westpunkt, so erhält man den Fußpunkt des Vertikalkreises auf dem Horizont. Die Verbindungslinie dieses Fußpunktes mit dem Mittelpunkte und die Nadir-Zenith-Linie stehen in Wirklichkeit auf einander senkrecht und können als konjugierte Durchmesser zur Zeichnung des Vertikalkreises benützt werden. Den Punkt S auf diesem Kreise findet man ebenfalls in der angegebenen Weise, indem man die Affinität des Vertikalkreises und des Meridians benützt.

Analog verfährt man bei der Zeichnung der übrigen Ellipsen. Man kann auch, statt auf die Affinitätsaxe und den Affinitätskreis zurückzugehen, die Ellipsen um ihre große Axe in die Bildebene umklappen, ähnlich wie es Fig. 16 zeigt, und erhält

dasselbe Resultat. Bei der senkrechten Projektion ist letzteres Verfahren im allgemeinen vorzuziehen.

Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45. In Fig. 43 sehen wir die senkrechte Projektion derselben Linien wie 42. In Fig. 44 sind die Aequatorial- und Ekliptikalcoordinatensysteme veranschaulicht. Fig. 45 gibt verschiedene Stellungen der Ekliptik zum Horizont während einer Umdrehung des Ekliptikpoles um den Himmelspol. Eine senkrechte Draufsicht dieser Stellungen gewährt Fig. 27 und eine andere Seitenansicht Fig. 29.

Fig. 46. Fig. 46 betrifft eine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie, nämlich: Gegeben zwei Seiten a und b und der Gegenwinkel A der einen. Man trägt an Winkel A die Seite b = A C ab und konstruiert aus diesen Stücken das rechtwinklige Dreieck A C D. Die Kathete u = C D läßt erkennen, daß, wenn sin a $<$ sin u die Lösung unmöglich ist; für sin u $<$ sin a bestehen zwei Lösungen.

Fig. 47. In Verbindung mit Fig. 47 können wir die zweite Aufgabe behandeln: Gegeben eine Seite b, ein anliegender Winkel A und der gegenüberliegende Winkel B, man soll das Dreieck konstruieren. Am Winkel A trägt man (Fig. 46) die Seite b ab und konstruiert zunächst die A gegenüberliegende Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks von der Hypotenuse b. Dann nimmt man den Flächenwinkel B, konstruiert (Fig. 47) dessen Neigungswinkelebene F P G H und legt durch das Lot O G auf die eine Grundebene B F B' des Winkels B Ebenen J K G und L M G, auf denen gerade die Kathete u der vorigen Figur ausgeschnitten werde. Durch das Zusammensetzen der Dreikante D A C aus Fig. 46 und L M B' auch J K B' aus Fig. 47 erhält man die beiden Lö-

sungen, falls Winkel B spitz ist. Ist aber Winkel B stumpf, so sind die Dreiecke J K B und L M B an C D gegen den Winkel A hin abzutragen, um die Lösungen zu erhalten. Die Fig. 47 veranschaulicht auch die Fälle eines stumpfen u.

Fig. 47 kann man auch als astronomische Figur auffassen: F P G H ist Ebene des Meridians, J K G und L M G sind zwei symmetrisch zum Meridian gelegte Vertikalkreise, B K M B' ist Ebene des Aequators. Fig. 48 zeigt dieselbe räumliche Figur, wie die vorige, jedoch in schiefer Projektion. Außerdem berührt ein Kleinkreis auf der Kugelfläche um P die beiden Ebenen J K G und L M G. Man kann auch P als Pol auffassen, B K M B' ist dann der durch den Ost- und Westpunkt gehende Stundenkreis. Der Kleinkreis um P stellt die Bahn eines Circumpolarsternes dar, während die Ebenen J K G und L M G die Vertikalkreise durch die Punkte seiner größten Digression veranschaulichen. Fig. 48.

Schlußzusammenstellung.

I. Schiefe Projektion.

Es soll ein Kreis mit der Normale $\xi\ \eta\ \zeta$ in schiefer Projektion abgebildet werden. Der Sehstrahl habe die Richtungen $\alpha\ \beta\ \gamma$.

Konstruktion des Axenkreuzes. Die Z Axe bildet, wenn wir die X Y Ebene parallel zur Bildebene stellen, in der Zeichnung mit den beiden anderen Axen die Winkel:

$$\cos z_x = + \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}; \quad \cos z_y = + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma};$$

Das Verkürzungsverhältnis auf der Z Axe ist tg γ.

Wir berechnen die Ausdrücke:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \xi + \cos \beta \cos \eta + \cos \gamma \cos \zeta;$$

$$\cos \xi' = 2 \cos \alpha \cos \varphi - \cos \xi;$$

$$\cos \eta' = 2 \cos \beta \cos \varphi - \cos \eta;$$

$$\cos \zeta' = 2 \cos \gamma \cos \varphi - \cos \zeta.$$

Größe der großen Halbaxe der Ellipse:

$$a = \frac{r \cos \varphi}{\cos \frac{\xi' + \zeta}{2}}$$

$$\text{der kleinen } b = \frac{r \cos \varphi}{\cos \frac{\zeta - \xi'}{2}}.$$

Winkel der großen Axe mit der X Axe:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = - \frac{\cos \xi' \cos \eta + \cos \eta' \cos \xi}{\cos \eta' \cos \eta - \cos \xi' \cos \xi}.$$

Kugelumriß in schiefer Projektion. Der Umriß ist eine Ellipse, die große Halbaxe $= \frac{r}{\cos \gamma}$, die kleine $= r$.

Winkel der großen Axe mit der Y und X Axe:

$$\cos \vartheta_1 = - \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}; \quad \cos \vartheta_2 = - \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}.$$

Konstruktion: Die große Axe hat die Richtung der Z Axe, ihre Größe ist gleich der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, das den auf der Z Axe aufgetragenen und verkürzt erscheinenden Kugelradius und den auf der Z Axe senkrecht stehenden Kugelhalbmesser zu Katheten hat.

II. Senkrechte Projektion.

Konstruktion des Axenkreuzes.

Gegeben die Axenabschnitte der Bildebene oder die Verhältniszahlen l m n.

Verkürzungsverhältnisse und Stellungswinkel des Sehstrahles:

$$L = \sin a = l \sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$$M = \sin b = \sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$$N = \sin b = \sqrt{\frac{2}{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Winkel der Axenbilder:

$$\cos \lambda = -\frac{\sqrt{(l^2 - m^2 + n^2)\,(l^2 + m^2 - n^2)}}{2\,m\,n};$$

$$\cos \mu = -\frac{\sqrt{(m^2 + n^2 - l^2)\,(l^2 + m^2 - n^2)}}{2\,l\,n};$$

$$\cos \nu = -\frac{\sqrt{(l^2 - m^2 + n^2)\,(m^2 + n^2 - l^2)}}{2\,l\,m}.$$

Umgekehrt ist:

$$L = \sqrt{-\frac{\cos \lambda}{\sin \mu \sin \nu}}; \quad M = \sqrt{-\frac{\cos \mu}{\sin \nu \sin \lambda}};$$

$$N = \sqrt{-\frac{\cos \nu}{\sin \lambda \sin \mu}}.$$

$$\cos \lambda = - \frac{1}{M\,N} \sqrt{(1 - M^2)(1 - N^2)}; \sin \lambda = \frac{1}{M\,N} \sqrt{1 - L^2};$$

$$\cos \mu = - \frac{1}{N\,L} \sqrt{(1 - N^2)(1 - L^2)}; \quad \sin \mu = \frac{1}{N\,L} \sqrt{1 - M^2};$$

$$\cos \nu = - \frac{1}{L\,M} \sqrt{(1 - L^2)(1 - M^2)}; \quad \sin \nu \quad \frac{1}{L\,M} \sqrt{1 - N^2};$$

Es soll ein Kreis mit den Normalenrichtungen r s t in senkrechter Projektion abgebildet werden.

Es sei $\cos g = \cos a \cos r + \cos b \cos s + \cos c \cos t$.

Halbaxen der Ellipse: R und R cos g.

Winkel der großen Axe mit den Axenbildern:

$$\cos \omega = \frac{\cos s \cos c - \cos t \cos b}{\sin a \sin g};$$

$$\cos \pi = \frac{\cos t \cos a - \cos r \cos c}{\sin b \sin g};$$

$$\cos \varkappa = \frac{\cos r \cos b - \cos s \cos a}{\sin c \sin g};$$

$$\omega + \pi + \varkappa = 360^0.$$

Spur des Kreises auf der X Y Ebene:

Winkelstand der Spur vom Sehstrahl:

$$\cos w_x = \frac{\cos t \cos b - \cos s \cos c}{\sin r}.$$

Winkel des Spurbildes mit dem Bilde der X-Axe:

$$\cos \varrho_x = - \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} w_x.$$

III. Konstruktionsangaben:

1. Konstruktion der Hauptaxen aus den gegebenen konjugierten Durchmessern einer Ellipse. Cf. Fig. 18. Man zieht M H $\perp$ und $=$ M D dann H C, halbiert H C in F, macht auf H C F A' $=$ F B' $=$ F M so sind M A' und M B' die Axenrichtungen, deren Längen M A $=$ A' H und M B $=$ B' H aufgetragen werden.

2. Konstruktion der Krümmungshalbmesser an den Scheiteln der Ellipse. Man hält (Fig. 21) von D auf A B das Lot, welches die Axen in B und S schneidet, dann sind R A und S B die Krümmungshalbmesser.

Beispiele.

Zum Schluß dürfte es nützlich sein, sowohl für die schiefe wie für die senkrechte Projektion ein Beispiel durchzurechnen.

I. Schiefe Projektion. Es soll der Aequator für eine Breite von 30° nördlich gezeichnet werden. Das Axenkreuz nehmen wir so an, daß die positive X-Axe nach dem Nordpunkt zielt, die positive Y Axe nach dem Zenith, die positive Z Axe nach dem Westpunkt. Dann sind: $\xi = 30^0$

$\eta = 60^0$

$\zeta = 90^0$

Ferner bildet der Sehstrahl mit den positiven Coordinatenaxen die Winkel:

$\alpha = 60^0$

$\beta = 120^0$

$\gamma = 45^0$

(sogenannte Cavalierperspektive).

Es ist dann:

$$\cos z_x = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad z_x = 45^0$$

$$\cos z_y = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad z_y = 135^0$$

als Winkel des Bildes der Z Axe mit der X- bezw. Y Axe. Das Verkürzungsverhältnis ist $tg\,\gamma = 1$.

Man rechnet dann aus:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \xi + \cos \beta \cos \eta + \cos \gamma \cos \zeta = \frac{\sqrt{3}-1}{4};$$

$$\cos \xi' = 2 \cos \alpha \cos \varphi - \cos \xi = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1);$$

$$\cos \eta' = 2 \cos \beta \cos \varphi - \cos \eta = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1);$$

$$\cos \zeta' = 2 \cos \gamma \cos \varphi - \cos \zeta = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1); \quad \zeta' = 75^0.$$

Die Halbaxen der Ellipse sind:

$$a = \frac{r \cos \varphi}{\cos \frac{\zeta' + \zeta}{2}} = 1,4\ r;$$

$$b = \frac{r \cos \varphi}{\cos \frac{\zeta - \zeta'}{2}} = 0,18\ r;$$

Der Winkel der großen Ellipsenaxe mit der positiven X Axe wird erhalten aus:

$$tg\ 2\vartheta = -\frac{\cos \xi' \cos \eta + \cos \eta' \cos \xi}{\cos \eta' \cos \eta - \cos \xi' \cos \xi}$$

$$2\vartheta = 75^0 \text{ oder } 180^0 + 75^0;$$

Hier ist der letztere Wert zu wählen, also:

$$d = 127^1/_2{}^0.$$

Mit diesen Werten kann man die Figur 49 konstruieren. Fig. 49.

II. Orthogonalprojektion.

Als Coordinaten werden angenommen: Positive X Axe: Richtung nach dem Nordpunkt, positive Y Axe: Richtung nach dem Ostpunkt, positive Z Axe: Richtung nach dem Zenith.

Der abzubildende Kreis ist die Ekliptik in der Lage, welche sie um *15 h* Sternzeit besitzt bei einer geographischen Breite von 30° nördlich. Die Richtungswinkel der Kreisnormalen werden berechnet aus den sphärischen Dreiecken:

Nordpol, Ekliptikpol, Zenith
„ „ Nordpunkt
„ „ Ostpunkt,

von denen man je zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt.

Es wird:

$\cos t = \cos 60^0 \cos 23^0 + \sin 60^0 \sin 23^0 \cos 45^0 = 0{,}699^{52}$

$\cos r = \cos 30^0 \cos 23^0 + \sin 30^0 \sin 23^0 \cos 135^0 = 0{,}659^{06}$

$\cos s = \cos 90^0 \cos 23^0 + \sin 90^0 \sin 23^0 \cos 45^0 = 0{,}276^{28}$

Daraus hat man:

$r = 48^0\ 53'$
$s = 74^0$
$t = 45^0\ 40'.$

Der Sehstrahl habe das von Nord gegen Ost gezählte Azimut 45° und die Zenithdistanz

$\mathrm{arc\ cos} \frac{\sqrt{3}}{1}$ ca 54° 54′ (Isometrische Projektion).

Es ist demnach $a = b = c = 54^0\ 54'$ als Richtungswinkel des Sehstrahls, und $l = m = n = 1$ als Verhältniszahlen.

Die Verkürzungsverhältnisse werden:

$L = \sin a = \sqrt{\frac{2}{3}} = M = N$, und die Winkel zwischen den Axenbildern:

$$\lambda = \mu = \nu = 120^0.$$

Man rechne nun aus:

$\cos g = \cos a \cos r + \cos b \cos s + \cos c \cos t;$
$\cos g = 0{,}91439;$
$g = 23^0\ 53'.$

Die Hauptaxen der Ellipse sind:

R und 0,91 R.

Der Winkel der großen Axe mit dem Axenbild der X Axe wird erhalten aus:

$$\cos \omega = \frac{\cos s \cos c - \cos t \cos b}{\sin a \sin g} = -0{,}73918$$

$$\omega = 137^0\ 40'.$$

Die Spur der Ellipse auf der y z Ebene wird:

$$\cos w_x = \frac{\cos t \cos b - \cos s \cos c}{\sin r} = 0{,}03243$$

$$w_x = 88^0\ 17'$$

und der Winkel des Spurbildes mit dem Bilde der X Axe:

$$\cos \varrho_x = -\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} w_x = -0{,}02106$$

$$\varrho_x = 91^0\ 10'.$$

Fig. 50. Mit diesen Werten kann man die Figur 50 konstruieren.

Verzeichnis der benützten Litteratur.

Diesterweg, Populäre Himmelskunde, Berlin 1860 und 1879.

Epstein, Geonomie, Wien 1888.

Fiedler, Darstellende Geometrie, Leipzig 2. Aufl. 1875.

Frézier, Théorie de la coupe despierres, Straßbourg 2. Aufl. 1754.

Geissler, Anschauliche Grundlagen der math. Erdkunde, Leipzig 1904.

Gelcich, Astronomische Bestimmung der geographischen Coordinaten, Leipzig u. Wien 1904.

Günther, Handbuch der mathemat. Geographie, Stuttgart 1890.

Des Ingenieurs Taschenbuch (Hütte), Berlin 18 Aufl. 1902.

Laska, Lehrbuch der Astronomie, Stuttgart 1889.

Lehmann, Die Erde und der Mond, Leipzig-Prag 1884.

Martus, Astronomische Geographie, Leipzig 1880.

Möllinger, Isometrische Projektionslehre, Solothurn 1840.

Mossbrugger, Größtenteils neue Aufgaben aus dem Gebiete der géométrie descriptive u. s. w., Zürich 1845.

Newcomb-Engelmann, Populäre Astronnmie, Leipzig 2 Auflage 1892.

Pohlke, Darstellende Geometrie, Berlin 1860.

Salmon Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig 1898.

Salmon Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1879/80.

Toad David P., A new Astronomy, New York, Cincinnati, Chicago, American Book Company (ohne Zahreszahl — 1898).

Weiler, Leitfaden der mathematischen Geographie, Leipzig 1881.

Weiler, Neue Behandlung der Parallelprojektion, Leipzig 1896.

Weissbach, Über die monodimetrische und anisometrische Projektionslehre (polytechnische Mitteilungen von Volz und Karmarsch, Tübingen 1844, Bd. I, pag. 125 — 136).

Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Leipzig I. Bd. 1884; II. Bd. 1887

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 3

Schiefe Projektion 4

1. Bestimmung der Gleichung der Projektion eines beliebigen Kreises 9
2. Bestimmung der Hauptaxen 15
3. Winkel zwischen Hauptaxen u. Coordinatenaxen 16
4. Bestimmung derjenigen Kreisdurchmesser, die in der Projektion als Hauptaxen erscheinen . . 18
5. Kugelumriß in schiefer Projektion 20
6. Richtungen der Hauptaxen in der Bild- oder Y X-Ebene 22
7. Bestimmung derjenigen Geraden, die in der Projektion die Hauptaxen ergeben 23
8. Konstruktion des Kugelumrisses in schiefer Projektion 25

Orthogonal-Projektion 26

1. Voraussetzungen und Beziehungen 26
2. Stellungswinkel einer Geraden und ihres Bildes 27
3. Stellungswinkel der Axenbilder 29
4. Winkel zwischen den Axenbildern 30
5. Die Verhältniszahlen u. Verkürzungsverhältnisse 33
6. Die drei Arten der Orthogonalprojektion . . . 38
7. Das Bild des Kreises in senkrechter Projektion 39
8. Winkel der Hauptaxen mit den Coordinatenaxen und den Axenbildern 41
9. Bilder der Spuren des Kreises 45
10. Umriss der Kugel in Orthogonalprojektion . . 48

Axonometrie und schiefe Projektion 50

Konstruktionsangaben 51

1. Konstruktion der Hauptaxen der Ellipse aus conjugierten Durchmessern 51
2. Das der Ellipse umgeschriebene Achteck . . . 54
3. Konstruktion der Krümmungshalbmesser an den Scheiteln 54

Seite

Besprechung einiger Figuren aus der Litteratur . . . 55
Häufig vorkommende Figuren 60
Schlußzusammenstellung 63
Beispiele 67
Verzeichnis der benützten Litteratur 71

Errata.

Seite 17: 2. Zeile v. o. und 4. Zeile v. u. lies pag. 7 statt pag. 5.
Seite 20: Letzte Zeile lies pag. 9 statt pag. 8.
Seite 21: 5. Zeile v. o. lies pag. 9 statt pag. 8.
Seite 22: 4. Zeile v. o. lies pag. 7 statt pag. 5.
Seite 23: 11. Zeile v. o. lies pag. 18 statt pag. 16.
Seite 49: 6. Zeile v. o. lies pag. 32 statt pag. 29.

Curriculum vitae.

Ich, Julius Ernst Dietz, wurde geboren am 30. November 1879 zu Rothau im Elsaß als Sohn des dortigen, 1902 verstorbenen, evangelischen Pfarrers Emil Dietz und der Fanny geborenen Mennet. Nach Besuch der Volksschule und durch Privatunterricht meines Vaters vorbereitet, kam ich Ostern 1893 auf das Gymnasium zu Buchsweiler im Elsaß, welches ich im Herbst 1898 mit dem Maturitätszeugnis versehen wieder verließ. Ich bezog dann die Universität Straßburg, wo ich an der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät von Herbst 1898 bis Ostern 1900 studierte. Dort hörte ich Vorlesungen bei Herrn Professor Dr. Weber, Herrn Professor Dr. Krazer, Herrn Professor Roth, und Herrn Professor Dr. Wislicenus, und nahm an den Uebungen des Herrn Professor Dr. Krazer teil.

Nach einer längeren Unterbrechung der Studien infolge einer mir im Militärdienste zugezogenen Brustkrankheit wandte ich mich gesundheitshalber dem technischen Studium zu und ging nach einjähriger Werkstattpraxis an die technische Hochschule in Darmstadt. Dort blieb ich von Ostern 1902 bis Herbst 1903 und hörte außer in den technischen Fächern: Vorlesungen bei Herrn Professor Dr. Dingeldey, Herrn Professor Dr. Scheffers, Herrn Professor Dr. Henneberg, Herrn Professor Dr. Schering, Herrn Professor Dr. Staedel, Herrn Professor Dr. Graefe, Herrn Professor Dr. Wiener, Herrn Professor Dr. Wirtz und Herrn Privatdozenten Dr. Schlink. Ich

nahm an den Uebungen der Herren Professoren Dingeldey, Scheffers, Henneberg, Schering, Graefe und Wiener teil und arbeitete im physikalischen Laboratorium. Vom zweiten Semester an war ich Assistent in den Uebungen für höhere Mathematik bei Herrn Professor Dr. Gundelfinger und nach drei Semestern bestand ich die Ingenieurdiplom-Vorprüfung für Maschinenbau mit Auszeichnung.

Darauf mußte ich wieder gesundheitshalber die Studien aussetzen und nahm Herbst 1903 eine kaufmännische Stellung in Davos an. Das Sommersemester 1905 konnte ich an der Universität Basel zubringen. Hier hörte ich Vorlesungen bei Herrn Prof. Dr. Von der Mühll, Herrn Prof. Dr. Kinkelin, Herrn Professor Dr. A. Riggenbach, Herrn Professor Dr. Hagenbach-Bischoff, Herrn Privatdozenten Dr. Spieß, und nahm an den Uebungen des Herrn Professor Dr. Von der Mühll teil. Diesen Herren fühle ich mich zu lebhaftem Danke verpflichtet; alle haben auf meinen unregelmäßigen Studiengang Rücksicht genommen. Hauptsächlich gebührt meine volle Erkenntlichkeit Herrn Professor Dr. Riggenbach, dem ich die Idee obiger Arbeit verdanke, und der mich durch seine Ratschläge kräftig unterstützt und dadurch die Erreichung meines Zieles wesentlich gefördert hat. Seit Herbst 1905 befinde ich mich wieder in kaufmännischer Stellung in Davos und bestand am 13. Juli 1906 die mündliche Doktorprüfung.

Figuren-Verzeichnis

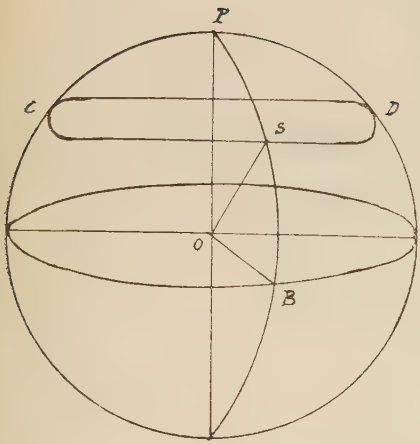


Fig. 1

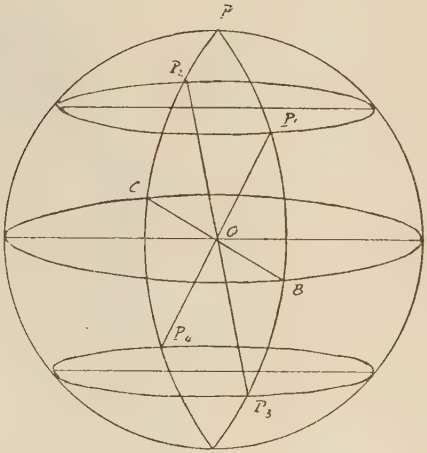


Fig. 2

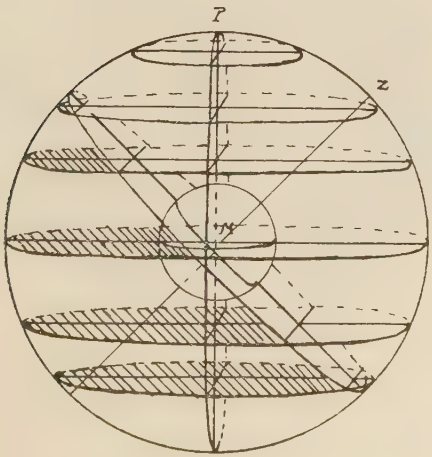


Fig. 3

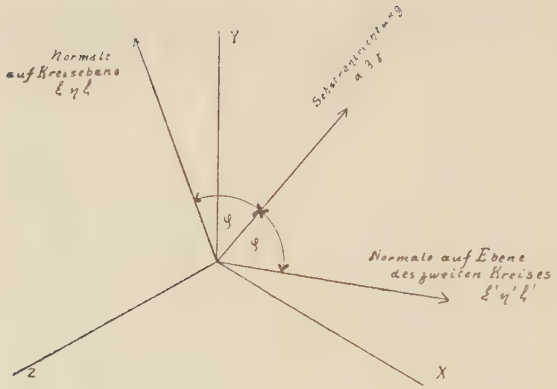

Normale
auf Kreisebene
ξ η ζ
Y
Schwerpunktrichtung
α β
φ
φ
Normale auf Ebene
des zweiten Kreises
ξ' η' ζ'
Z
X

Fig. 4

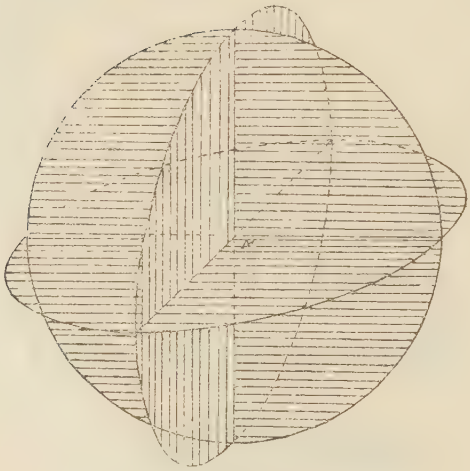


Fig. 5

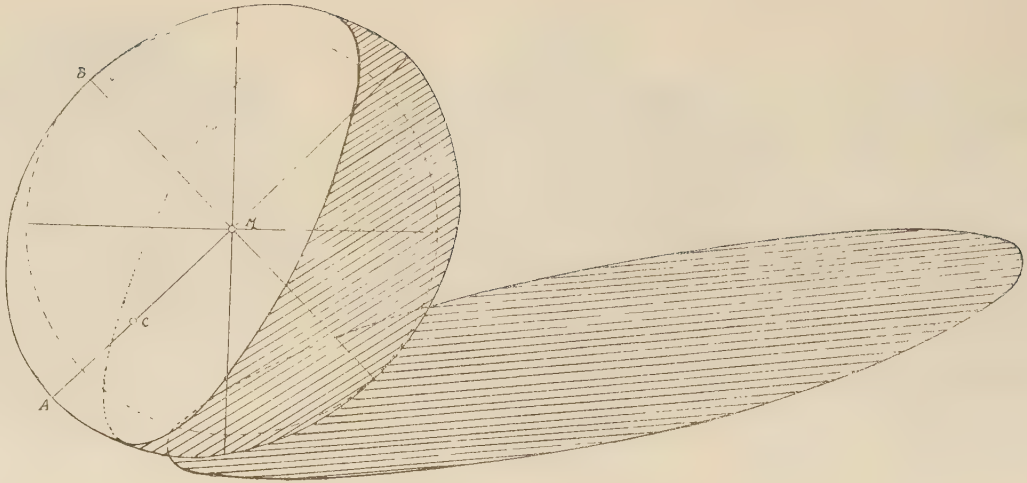


Fig. 6

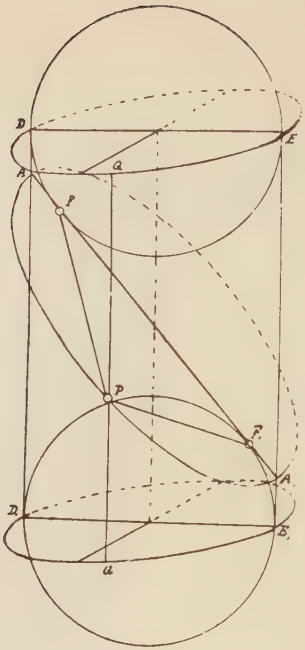


Fig. 7

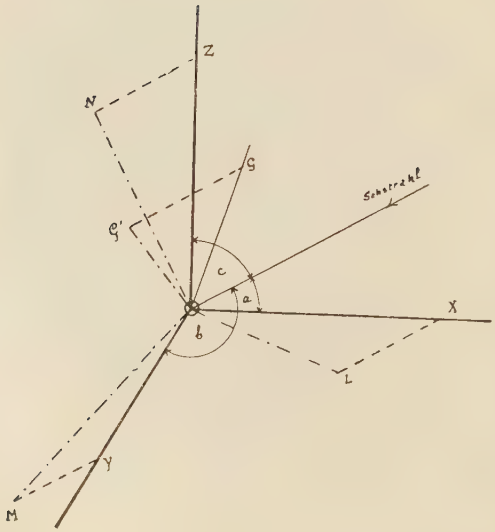


Fig. 8

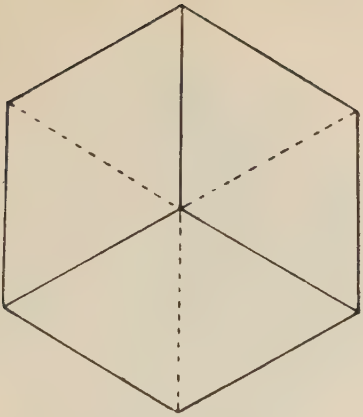


Fig. 9

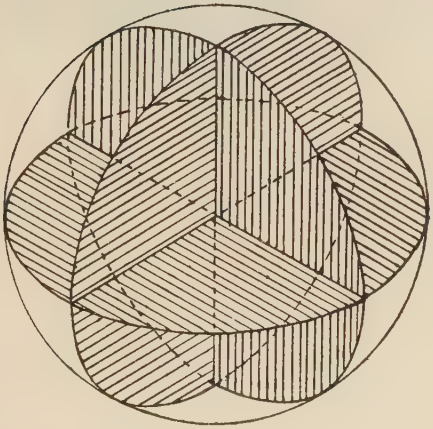


Fig. 10

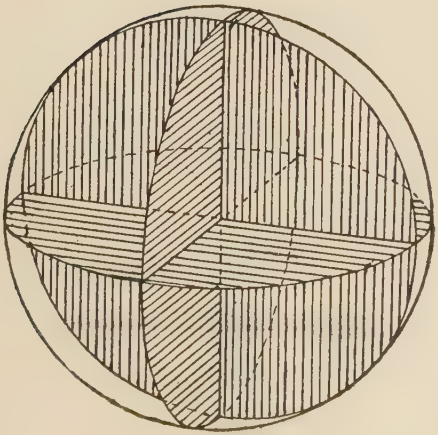


Fig. 11

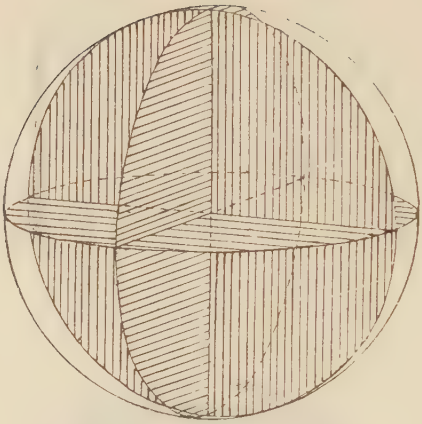


Fig. 12

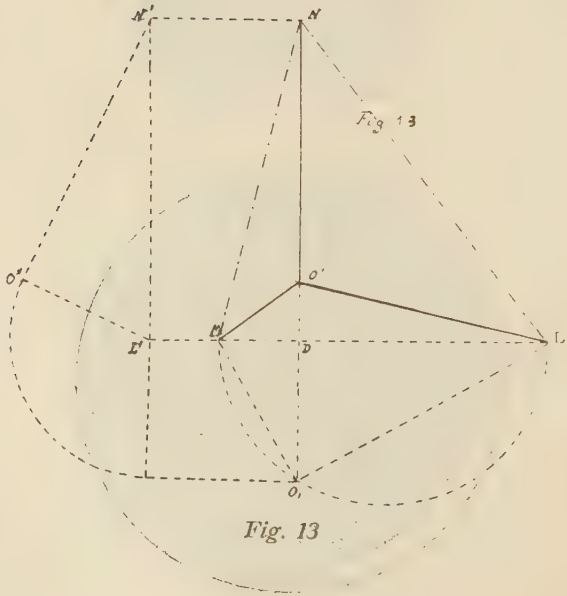


Fig. 13

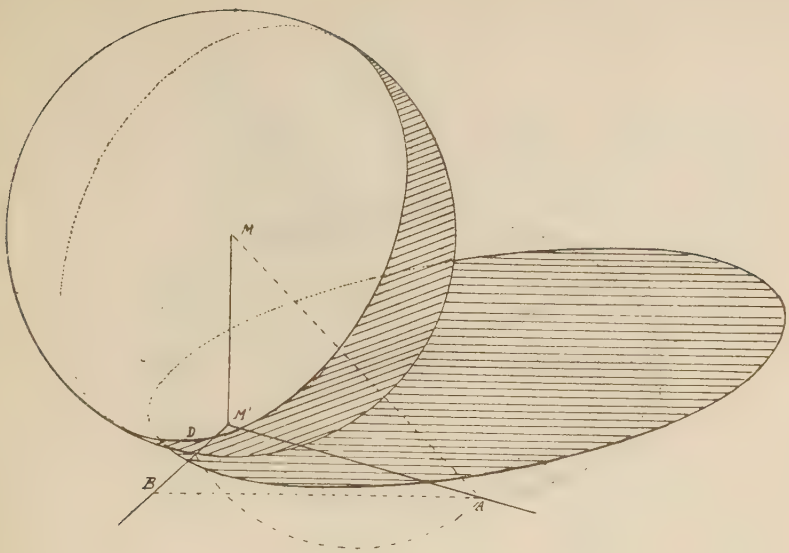


Fig. 14

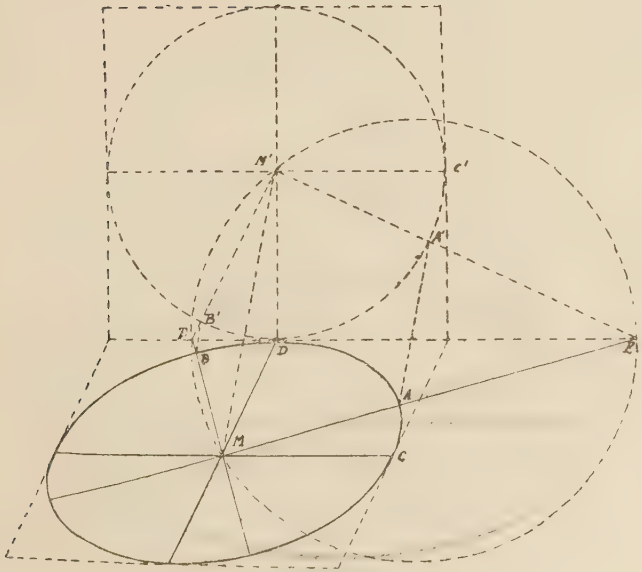


Fig. 15

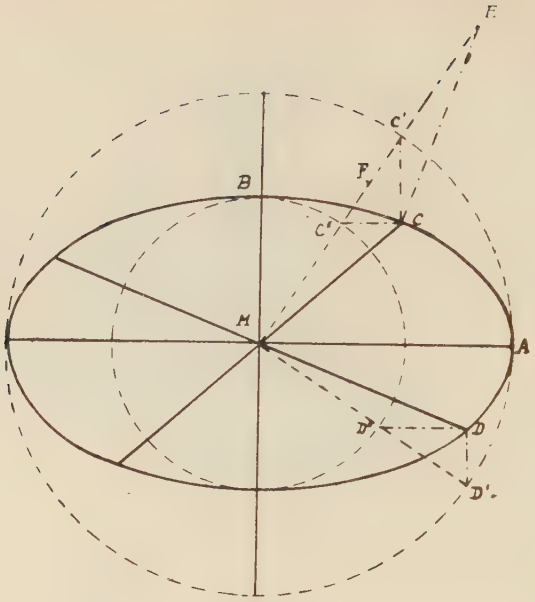


Fig. 16

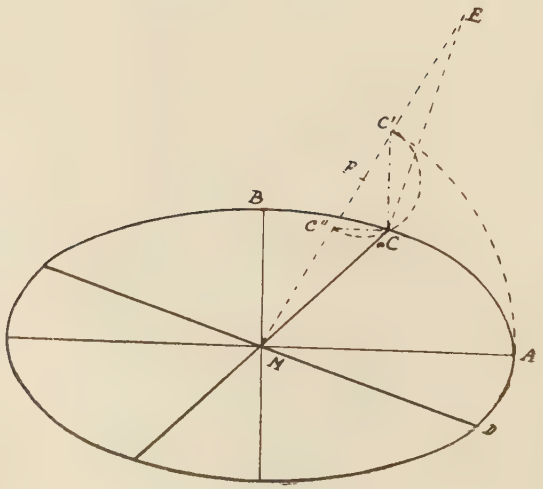


Fig. 17

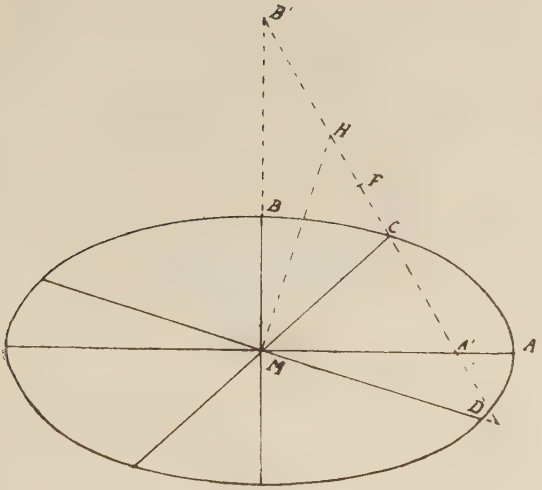


Fig. 18

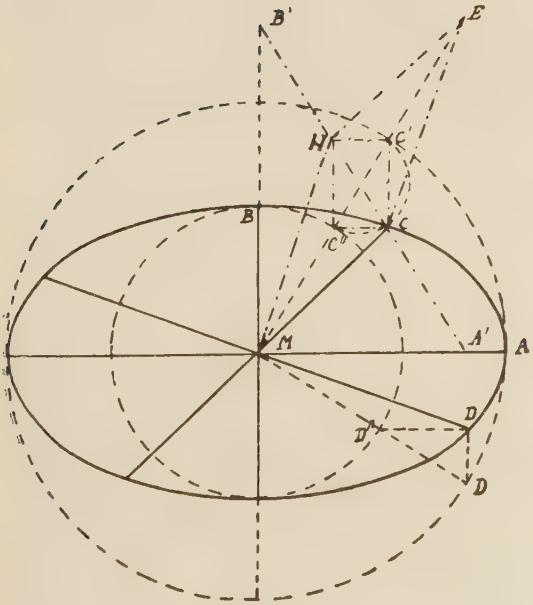


Fig. 19

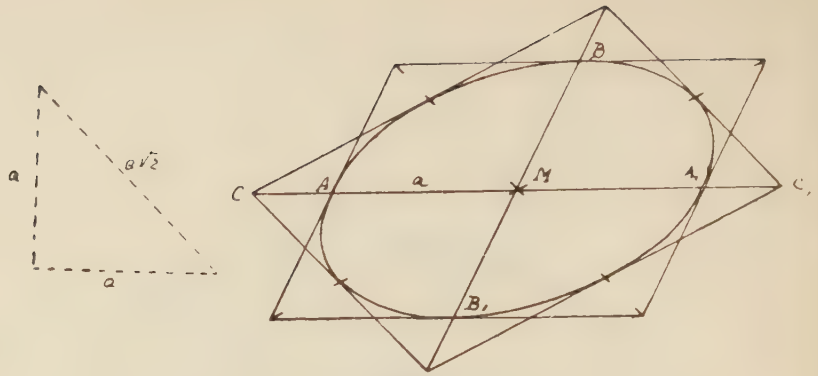


Fig. 20

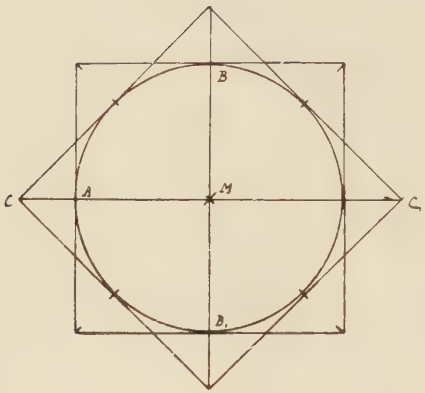


Fig 20

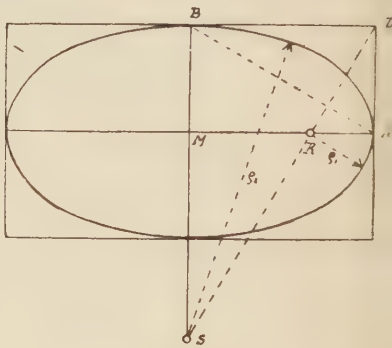


Fig. 21

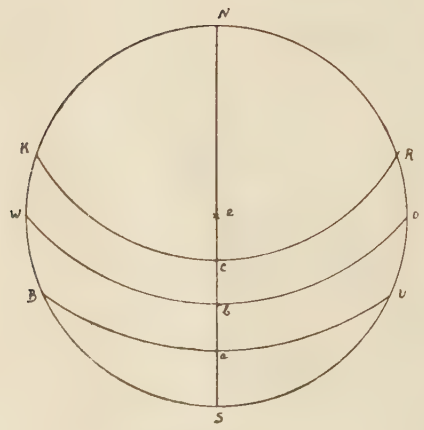


Fig. 22

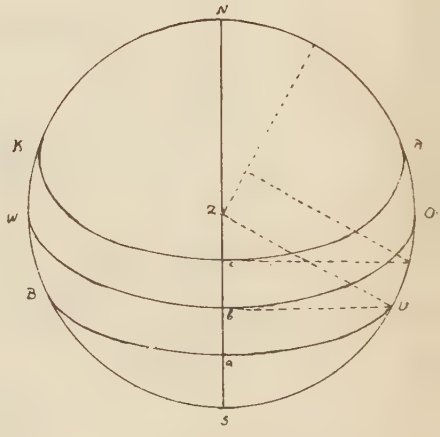


Fig. 23

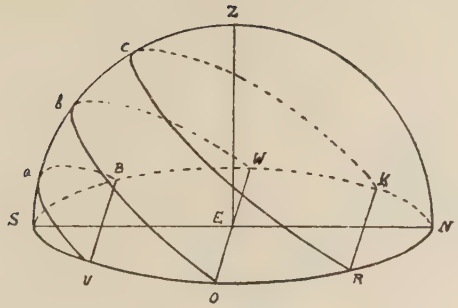


Fig. 24

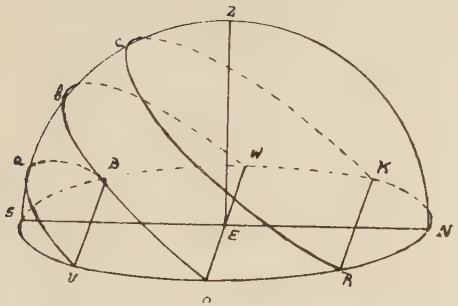


Fig. 25

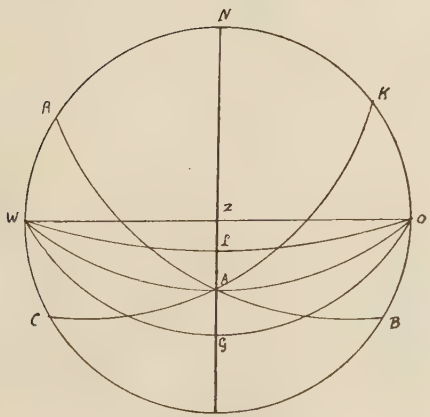


Fig. 26

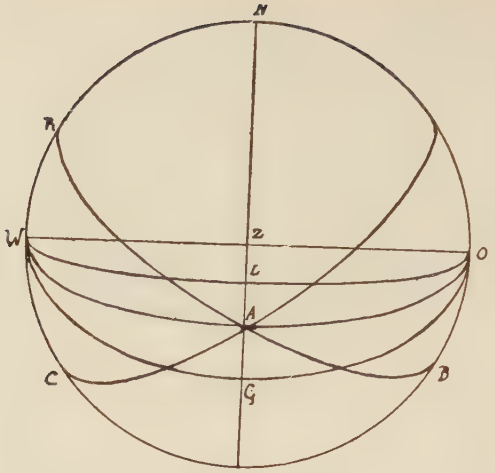


Fig. 27

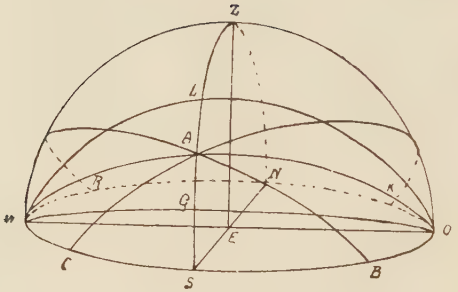


Fig. 28

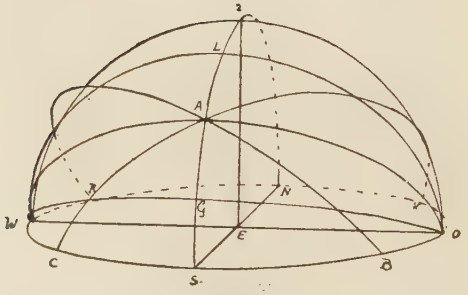


Fig. 29

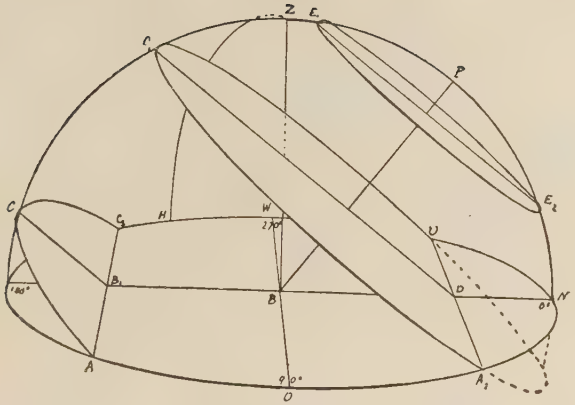


Fig. 30

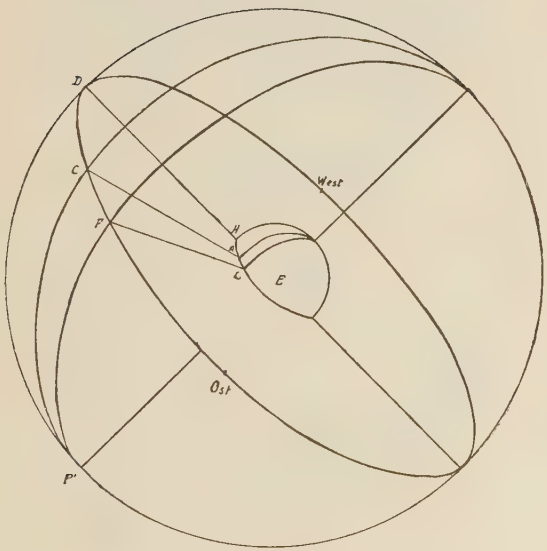


Fig. 31

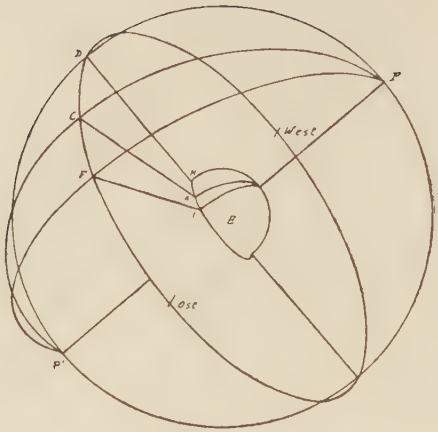


Fig. 32

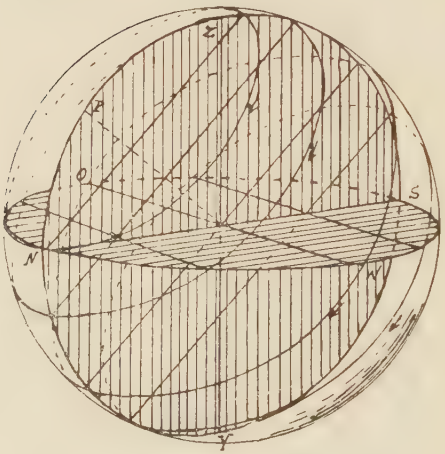


Fig. 33

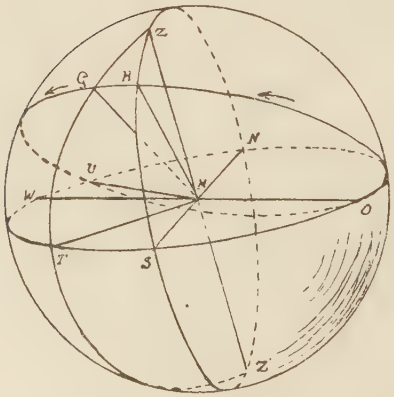


Fig. 34

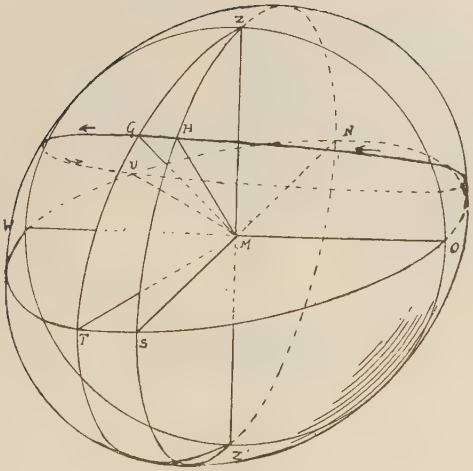


Fig. 35

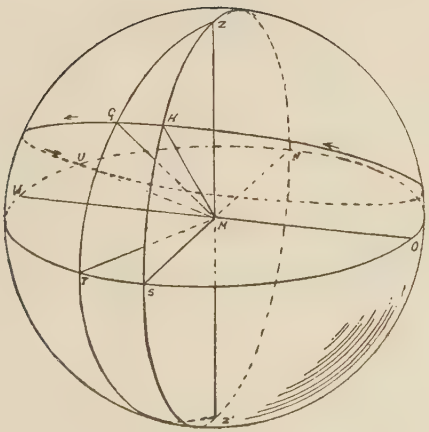


Fig. 36

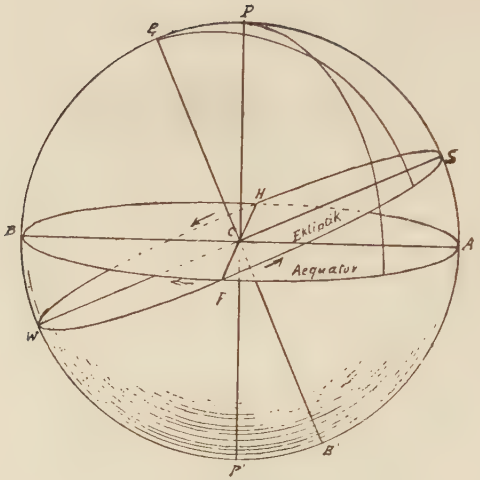

P
Q
S
H
B
C
Ekliptik
A
Aequator
I
W
B'
P'

Fig. 37

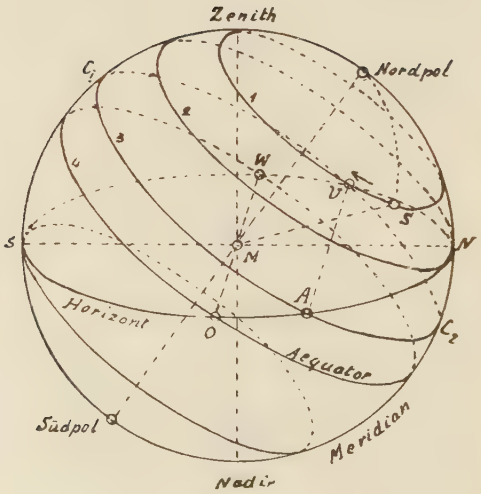

Zenith
C_1
Nordpol
1
2
3
4
W
V
S
N
M
A
Horizont
O
C_2
Aequator
Südpol
Meridian
Nadir

Fig. 38

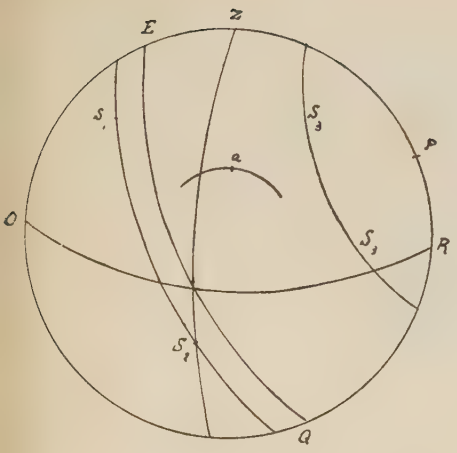


Fig. 39

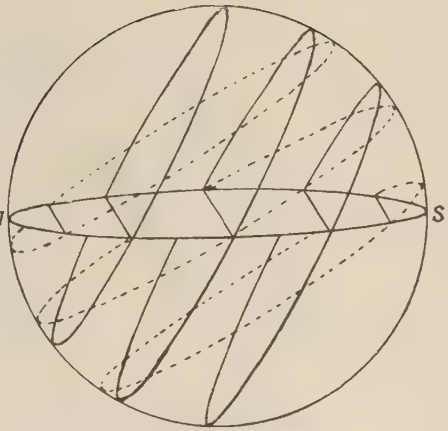


Fig. 40

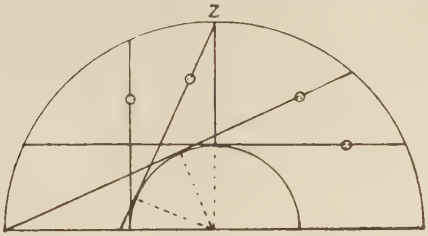


Fig. 41

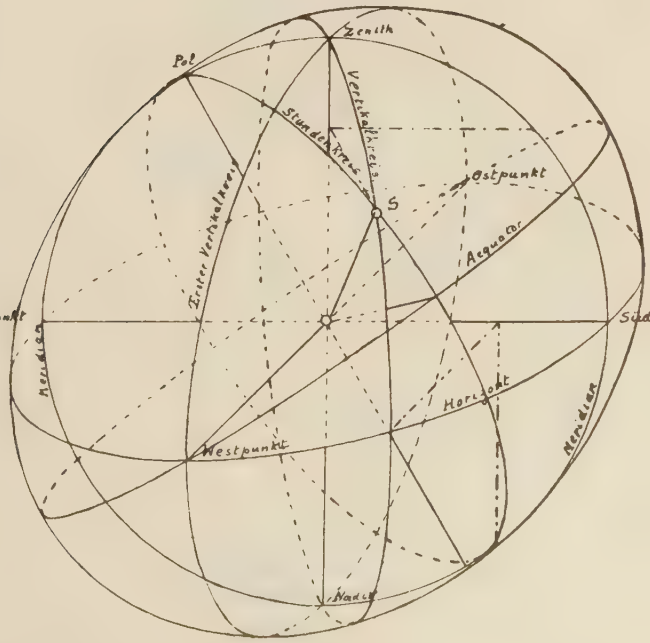


Fig. 42

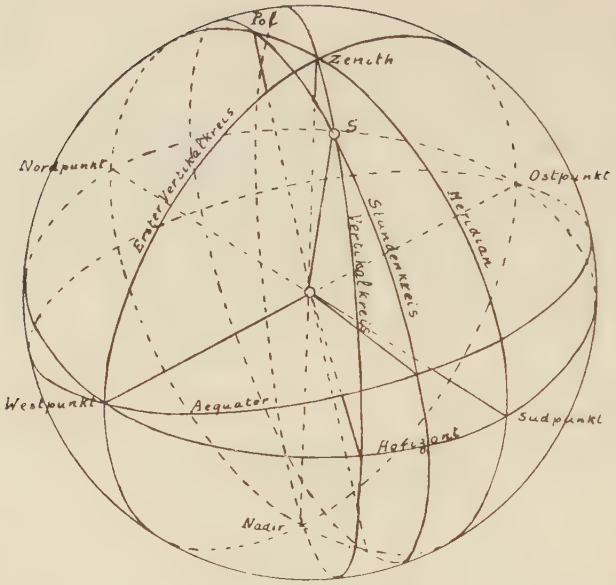

Pol
Zenith
S
Nordpunkt
Ostpunkt
Erstervertikalkreis
Stundenkreis
Vertikalkreis
Meridian
Westpunkt
Aequator
Südpunkt
Horizont
Nadir

Fig. 43

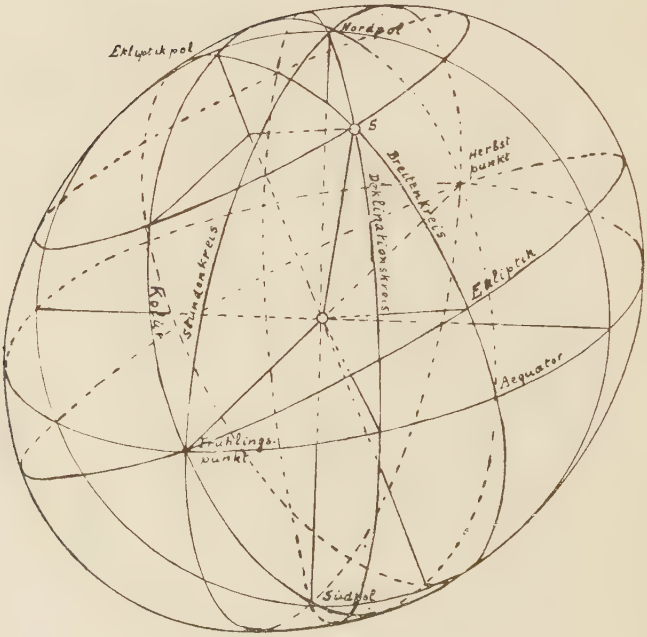

Ekliptikpol
Nordpol
S
Herbstpunkt
Breitenkreis
Deklinationskreis
Ekliptik
Stundenkreis
Aequator
Frühlingspunkt
Südpol

Fig. 44

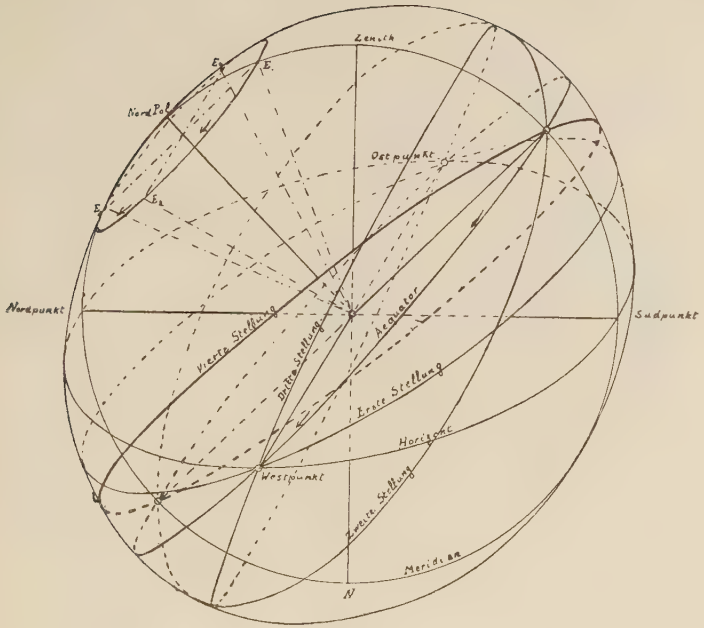

Zenith
Nord Pol
Ostpunkt
Nordpunkt
Sudpunkt
Vierte Stellung
Dritte Stellung
Aequator
Erste Stellung
Horizont
Westpunkt
Zweite Stellung
Meridian
N

Fig. 45

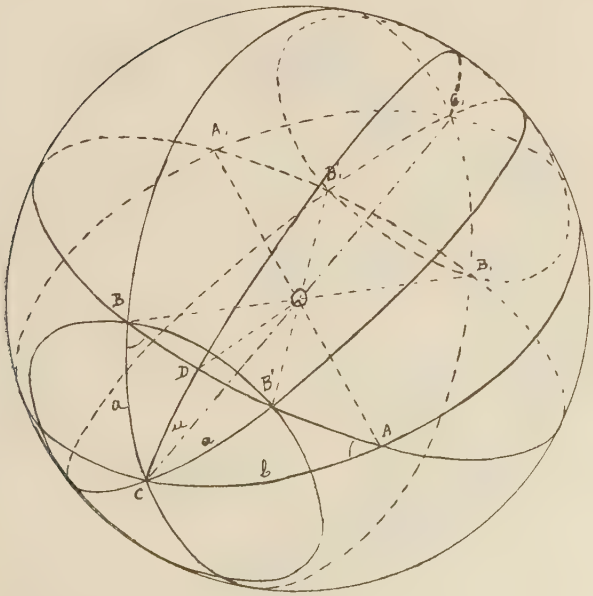

A
B
C
D
a
b

Fig. 46

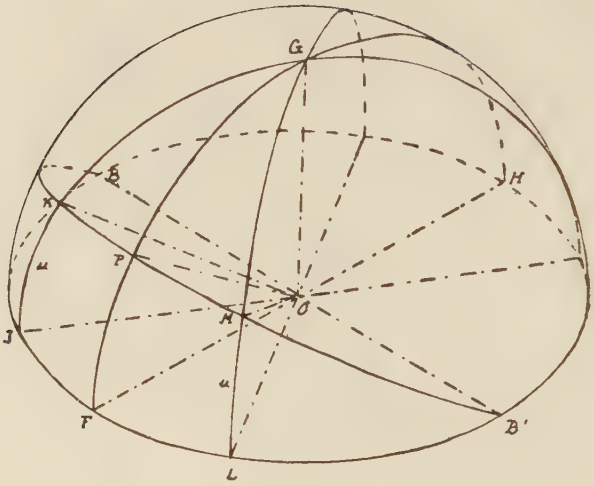

G
B
H
K
P
u
O
M
J
u
F
B'
L

Fig. 47

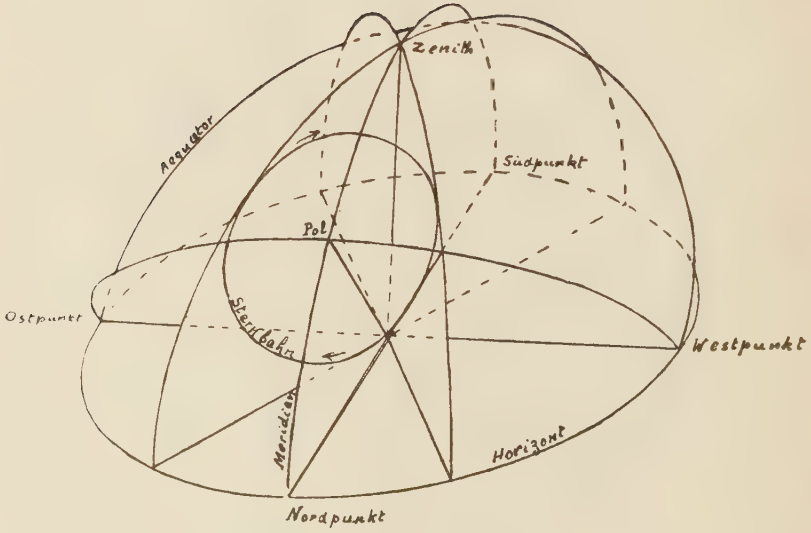

Zenith
Aequator
Südpunkt
Pol
Ostpunkt
Sternbahn
Westpunkt
Meridian
Horizont
Nordpunkt

Fig. 48

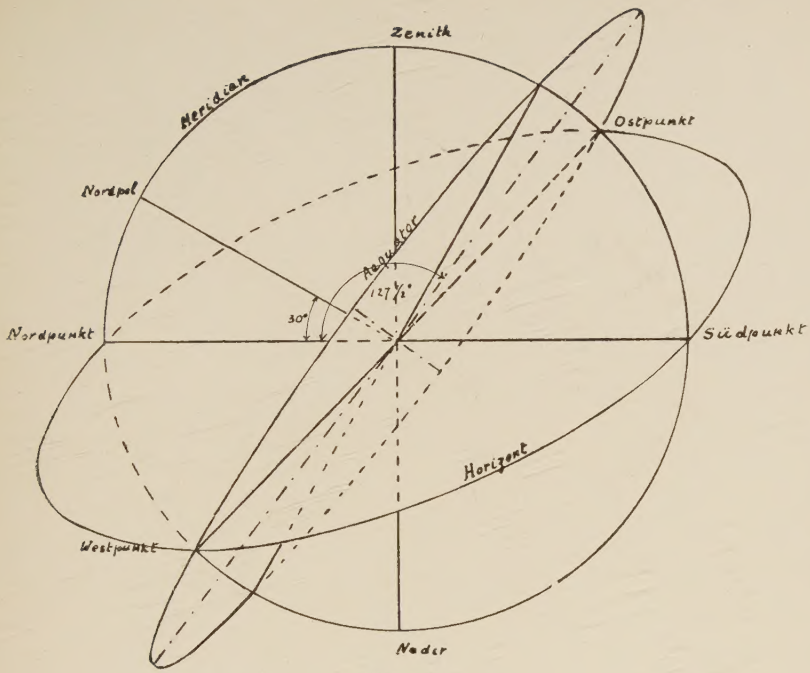
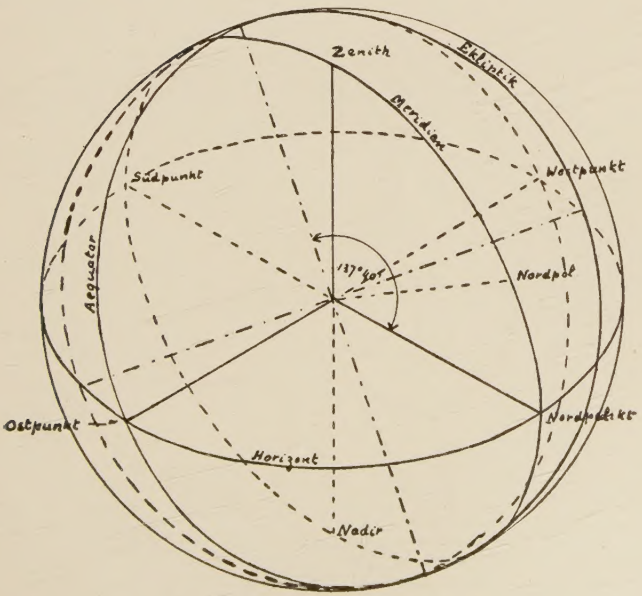

Zenith
Meridian
Ostpunkt
Nordpol
Äquator
127½°
30°
Nordpunkt
Südpunkt
Horizont
Westpunkt
Nadir

Fig. 49


Zenith
Ekliptik
Meridian
Südpunkt
Westpunkt
Äquator
137°30'
Nordpol
Ostpunkt
Nordpunkt
Horizont
Nadir

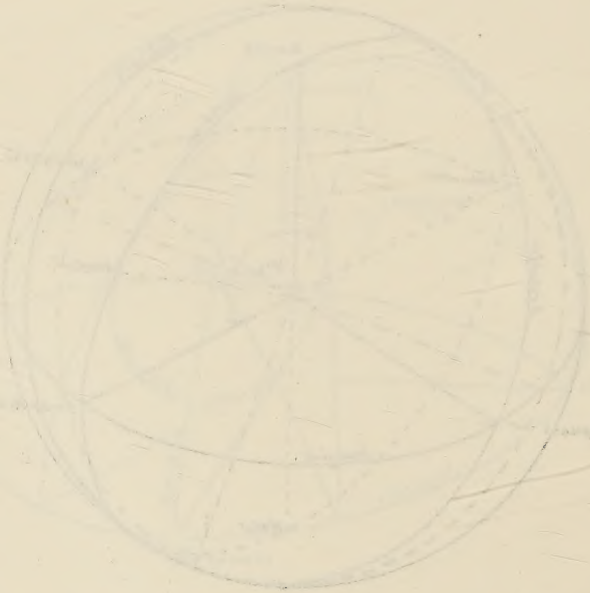



Fig. 50